บทที่ 4
ทฤษฎีและแนวคิดที่ใช้ในการศึกษา

4.1 การวิเคราะห์อนุกรมเวลา (Time Series Analysis)

การวิเคราะห์อนุกรมเวลาเป็นวิธีที่ใช้ในการวิเคราะห์ข้อมูล หรือค่าสังเกตที่มีการเปลี่ยนแปลงไปตามลำดับเวลาที่เกิดขึ้น หรือการเปลี่ยนแปลงของตัวแปรในช่วงเวลาในอดีต ลักษณะของการเปลี่ยนแปลงอาจมีหรือไม่มีรูปแบบก็ได้ แต่ถ้าหากอนุกรมเวลาแสดงให้เห็นรูปแบบการเปลี่ยนแปลงในช่วงเวลาที่ผ่านมาในอดีต ก็จะทำให้สามารถคาดการณ์ได้ว่าในอนาคตลักษณะการเปลี่ยนแปลงควรอยู่ในรูปแบบใด และสามารถพยากรณ์การเปลี่ยนแปลงข้อมูลในอนาคตได้ การวิเคราะห์ข้อมูลอนุกรมเวลาจะขึ้นอยู่กับการเปลี่ยนแปลงของเวลาในอดีตเป็นพื้นฐาน (ศิริลักษณ์ เล็กสมบูรณ์, 2531)

4.2 การทดสอบความนิ่งของข้อมูล (Stationary) และการทดสอบ Unit root

ข้อมูลอนุกรมเวลาที่มีลักษณะนิ่ง (Stationary) คือข้อมูลที่ค่าเฉลี่ยและความแปรปรวนของกระบวนการเชิงสุ่มนั้นมีค่าคงที่เมื่อเวลาได้เปลี่ยนไป และค่าความแปรปรวนระหว่างสองคาบเวลาขึ้นอยู่กับความล่า (Lag) ระหว่างคาบเวลาทั้งสอง โดยสามารถเขียนเ ป็นสมการได้ดังนี้ (ทรงศักดิ์ ศรีบุญจิตต์ และอารี วิบูลย์พงศ์, 2542)

ค่าเฉลี่ย (Mean) : $E(x_t) = \text{constant} = \mu$ (4.1)

ความแปรปรวน (Variance) : $V(x_t) = \text{constant} = \sigma^2$ (4.2)

ความแปรปรวนร่วม (Covariance) : $\text{cov}(x_t, x_{t+k}) = E(x_t - \mu)(x_{t+k} - \mu) = \sigma_k - \mu$ (4.3)

โดยที่ x_t แทนข้อมูลอนุกรมเวลาซึ่งเป็นกระบวนการเชิงสุ่ม

ในการวิเคราะห์ข้อมูลที่เป็นอนุกรมเวลานั้น ข้อมูลจะต้องมีลักษณะนิ่ง เนื่องจากข้อมูลอนุกรมเวลานั้นมาจากกระบวนการเชิงสุ่ม (Random Process) การนำข้อมูลอนุกรมเวลาไปใช้โดยไม่ได้ทำการตรวจสอบว่าข้อมูลนั้นมีลักษณะนิ่งนั้น ค่าสถิติที่เกิดขึ้นจะมีการแจกแจงไม่มาตรฐาน (Nonstandard Distribution) ซึ่งทำให้การนำไปใช้เปรียบเทียบกับค่าในตารางมาตรฐานไม่ถูกต้อง เนื่องจากค่าต่าง ๆ นั้น มีสมมติฐานว่าข้อมูลนั้นมีการแจกแจงมาตรฐาน (Standard Distributions) ทำให้นำไปสู่การลงความเห็นที่ผิดพลาดและความสัมพันธ์ที่ไม่แน่จริง (Spurious Regression) กล่าวคือ R^2 มีค่าสูงมากและได้ค่าสถิติ t – test มีนัยสำคัญหรือสูงเกินกว่าความเป็นจริง

ในการใช้ข้อมูลอนุกรมเวลาต้องทำการทดสอบว่าข้อมูลที่นำมาใช้มีลักษณะนิ่งหรือไม่ ซึ่งจะใช้การทดสอบ Unit Root โดยในการศึกษาจะพิจารณาเฉพาะวิธีของ Dickey-Fuller โดยวิธี DF (Dickey-Fuller Test) และ ADF (Augmented Dickey-Fuller Test) ซึ่งกำหนดโดยสมการ (4.4)

$$x_t = \rho x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4.4}$$

โดยกำหนดสมมติฐานหลัก $H_0 : \rho = 1$

และ $H_1 : |\rho| < 1$

ถ้ายอมรับ H_0 แสดงว่าข้อมูลมีลักษณะไม่นิ่ง แต่ถ้าปฏิเสธ H_0 แสดงว่าข้อมูลนั้นมีลักษณะนิ่ง และการทดสอบนี้ยังสามารถแปลงสมการได้ดังนี้ คือ

กรณีไม่มีค่าคงที่และแนวโน้มเวลา $$\Delta x_t = \theta x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4.5}$$

กรณีมีค่าคงที่ $$\Delta x_t = \alpha + \theta x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4.6}$$

กรณีมีทั้งค่าคงที่และแนวโน้มเวลา $$\Delta x_t = \alpha + \beta t + \theta x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4.7}$$

โดยกำหนดสมมติฐานหลัก $H_0 : \theta = 0$

และสมมติฐานรอง $H_1 : \theta < 0$

การยอมรับ H_0 แสดงว่าข้อมูลมีลักษณะไม่นิ่ง แต่ถ้าปฏิเสธ H_0 แสดงว่าข้อมูลนั้นมีลักษณะนิ่ง นอกจากนี้ถ้าสมการ (4.5) (4.6) และ (4.7) นำไปเข้ากระบวนการอัตถดถอย (Autoregressive Processes) จะได้ดังนี้

กรณีไม่มีค่าคงที่และแนวโน้มเวลา $$\Delta x_t = \theta x_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \Delta x_{t-i} + \varepsilon_t \tag{4.8}$$

กรณีมีเฉพาะค่าคงที่ $$\Delta x_t = \alpha + \theta x_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \Delta x_{t-i} + \varepsilon_t \tag{4.9}$$

กรณีมีทั้งค่าคงที่และแนวโน้มเวลา $$\Delta x_t = \alpha + \beta t + \theta x_{t-1} + \sum_{i=1}^{p} \phi_i \Delta x_{t-i} + \varepsilon_t \tag{4.10}$$

ซึ่งสมการที่ (4.8) (4.9) และ (4.10) เป็นการทดสอบ Augmented Dickey-Fuller Test (ADF) นั่นเอง ซึ่งพัฒนามาจากวิธี Dickey-Fuller Test เพื่อแก้ปัญหา Serial Correlation ในการตรวจสอบว่าข้อมูลนั้นมีลักษณะนิ่งหรือไม่ โดยการเปรียบเทียบค่าสถิติ t ที่คำนวณได้กับค่าวิกฤติ (Critical Value) ในตาราง ADF

4.3 แบบจำลอง Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (ARCH)

ในแบบจำลองเศรษฐมิติแบบดั้งเดิม ได้มีการสมมติให้ความแปรปรวนของเทอมความคลาดเคลื่อนมีค่าคงที่หรือค่าคงตัวซึ่ง Enders (1995) ได้แสดงให้เห็นว่าข้อมูลเศรษฐกิจอนุกรมเวลา

จำนวนมากในคาบเวลามีความผันผวนสูงมาก ตามมาด้วยคาบเวลาที่อนุกรมดังกล่าวค่อนข้างจะมีความสงบซึ่งจะเห็นได้ว่าข้อสมมติที่ว่าความแปรปรวนของเทอมความคลาดเคลื่อนมีค่าคงที่หรือค่าคงตัวนั้น ไม่น่าจะเป็นข้อสมมติที่เหมาะสมหรือถูกต้อง ซึ่ง Enders (1995) กล่าวว่า ในหลายสถานการณ์ เราสนใจแต่เพียงความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขเท่านั้น เช่นนักลงทุนในตลาดหุ้น อาจจะสนใจในการพยากรณ์อัตราผลตอบแทน (Rate of Return) และความแปรปรวนของหุ้นที่เราถือเท่านั้น ในขณะที่ความแปรปรวนแบบไม่มีเงื่อนไข (Unconditional Variance) ซึ่งคือความแปรปรวนระยะยาวนั่นเอง อาจจะไม่ใช่สิ่งที่สำคัญ ถ้านักลงทุนวางแผนที่จะซื้อขายหุ้นในช่วงไม่ยาวจนเกินไปนัก

ในการพยากรณ์ความแปรปรวนวิธีหนึ่งที่เรามักจะคุ้นเคยก็คือ แบบจำลองที่แสดงความสัมพันธ์ระหว่าง x_{t+1} กับ ε_{t+1} และ x_t ซึ่งเขียนเป็นสมการได้ดังนี้ (ทรงศักดิ์ ศรีบุญจิตต์ และอารีวิบูลย์พงศ์, 2542)

$$x_{t+1} = \varepsilon_{t+1} x_t \tag{4.11}$$

โดยที่ x_{t+1} = ตัวแปรที่เรากำลังพิจารณา

ε_{t+1} = ตัวเทอมรบกวน White Noise ซึ่งมีความแปรปรวนเท่ากับ σ^2 ซึ่งเป็นค่าคงที่

x_t = ตัวแปรอิสระ (Independent Variable) ณ คาบเวลา t ซึ่งเป็นตัวแปรที่เราสังเกตได้เช่นเดียวกัน

จากสมการ (4.11) จะสังเกตได้ว่าถ้า x_t มีค่าเท่ากับทุกคาบเวลาและเท่ากับค่าคงที่ หรือค่าคงตัว ซึ่งสมมติว่าเท่ากับ x สมการ (4.11) จะสามารถเขียนได้ใหม่ดังนี้

$$x_{t+1} = \varepsilon_{t+1} x \tag{4.12}$$

เราจะได้ว่า $\{x_{t+1}\}$ sequence ก็จะมีลักษณะเป็น White Noise Process ด้วยความแปรปรวนคงที่หรือคงตัว อย่างไรก็ตาม $\{x_t\}$ sequence มักจะมีค่าไม่เท่ากัน เพราะฉะนั้นความแปรปรวนภายใต้เงื่อนไขของ x_t สามารถเขียนได้ดังนี้

$$Var(x_{t+1} \mid x_t) = \sigma^2 x_t^2 \tag{4.13}$$

และถ้าค่าสืบเนื่อง (Successive Values) ของ $\{x_{t+1}\}$ มี Positive Serial Correlation ความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของ $\{x_t\}$ sequence ก็จะมี Positive Serial Correlation ด้วย ในลักษณะเช่นนี้ $\{x_{t+1}\}$ sequence ก็จะทำให้เกิดคาบเวลาของความผันผวนใน $\{x_t\}$ sequence

ในทางปฏิบัติแล้ว เราอาจจะปรับปรุงแบบจำลองที่กล่าวมาแล้วข้างต้นให้อยู่ในรูปแบบดังนี้

$$\ln x_t \; = \; a_0 + a_1 \ln(x_{t+1}) + e_t \tag{4.14}$$

โดยที่ e_t = เทอมความคลาดเคลื่อนซึ่งคือ $\ln(\varepsilon_t)$ นั่นเอง

และสามารถทำการถดถอยโดยใช้ OLS (OLS Regression) แต่จุดอ่อนของวิธีก็คือเราสมมติไว้แน่นอนว่า $\{x_{t+1}\}$ เป็นสาเหตุของการเปลี่ยนแปลงความแปรปรวนและโดยเหตุผลทางทฤษฎีแล้ว เราอาจจะไม่มีเหตุผลที่ดีเพียงพอในการเลือกตัวแปร $\{x_{t+1}\}$ ที่เป็นสาเหตุของการเปลี่ยนแปลงของความแปรปรวนได้ และสิ่งที่เป็นจุดอ่อนที่สำคัญอีกประการหนึ่งของแบบจำลองสมการ (4.14) ก็คือเราได้สมมติว่าเทอมความคลาดเคลื่อนซึ่ง คือ $\{e_t\}$ sequence มีความแปรปรวนคงที่หรือคงตัว (Constant Variance) ถ้าข้อสมมติดังกล่าวไม่ถูกต้อง ก็จะต้องมีการแปลงข้อมูล (Data Transformation) อีก

ในการวิเคราะห์อนุกรมเวลาส่วนใหญ่แล้วจะมีการกำหนด Stochastic Variable ให้มีความแปรปรวนคงที่ (Homoscadastic) ซึ่งในการประยุกต์ใช้กับบางข้อมูลนั้น ค่าความแปรปรวนของค่าเทอมคลาดเคลื่อนจะไม่ใช่ฟังก์ชั่นของตัวแปรอิสระ แต่มีค่าเปลี่ยนแปลงไปตามช่วงเวลาขึ้นอยู่กับขนาดของความคลาดเคลื่อนที่เกิดขึ้นในอดีต หรือกล่าวได้ว่าค่าความแปรปรวนของเทอมคลาดเคลื่อนนั้น ขึ้นอยู่กับค่าความผันผวน (Volatility) ของความคลาดเคลื่อนในอดีตที่ผ่านมา

ความเป็นไปได้ในการหาค่าเฉลี่ย และความแปรปรวนของอนุกรมเวลาไปพร้อมกันนั้น ในขั้นต้นการพยากรณ์อย่างมีเงื่อนไขจะมีความแม่นยำเหนือกว่าการพยากรณ์อย่างไม่มีเงื่อนไขมาก ซึ่งจากแบบจำลอง Autoregressive Moving Average (ARMA) แสดงได้ดังนี้

$$x_t = a_0 + a_1 x_{t-1} + \varepsilon_t \tag{4.15}$$

และต้องการพยากรณ์อย่างมีเงื่อนไขของ x_{t+1} ดังนี้ คือ

$$E_t x_{t+1} = \; a_0 + a_1 x_t \tag{4.16}$$

และค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไขในการพยากรณ์ x_{t+1} ค่าความคลาดเคลื่อนของความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขที่พยากรณ์ได้ดังนี้

$$E_t[(x_{t+1} - a_0 - a_1 x_t)^2] \; = \; E_t \varepsilon_{t+1}^2 \; = \; \sigma^2 \tag{4.17}$$

ถ้าเปลี่ยนไปใช้การพยากรณ์แบบไม่มีเงื่อนไขแล้ว ผลที่ใช้จะเป็นค่าเฉลี่ยในช่วงระยะยาวของลำดับ $\{x_t\}$ ซึ่งเท่ากับ $\frac{a_0}{(1-a_1)}$ จะได้ค่าความคลาดเคลื่อนของการพยากรณ์อย่างไม่มีเงื่อนไขตามสมการ (4.18) คือ

$$E_t\left\{\left[(x_{t+1})-\frac{a_0}{(1-a_1)}\right]^2 = E\left[\left(\varepsilon_{t+1}+a_1\varepsilon_t+a_1^2\varepsilon_{t-1}+a_1^3\varepsilon_{t-2}+\ldots\right)^2\right]\right\}$$
$$= \frac{\sigma^2}{(1-a_1^2)} \qquad (4.18)$$

เมื่อ $\frac{1}{(1-a_1^2)} > 1$ ค่าความแปรปรวนที่ได้จากการพยากรณ์อย่างไม่มีเงื่อนไขจะสูงกว่าแบบมีเงื่อนไข ดังนั้นในการพยากรณ์อย่างไม่มีเงื่อนไขจึงมีความเหมาะสมกว่า ในลักษณะเดียวกันถ้าความแปรปรวนของ $\{\varepsilon_t\}$ ไม่เป็นค่าคงที่ จะสามารถประมาณค่าแนวโน้มของการเปลี่ยนแปลงความแปรปรวนได้โดยใช้ ARMA Model อธิบาย โดยให้ $\{\hat{\varepsilon}_t\}$ แทนส่วนที่เหลือ (Residuals) ที่ได้จากการประมาณจากสมการ (4.15) ดังนั้นค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของ x_{t+1} จะได้ดังสมการ (4.19)

$$Var(x_{t+1}\,|\,x_t) = E_t[(x_{t+1}-a_0-a_1x_t)^2]$$
$$= E_t\varepsilon_{t+1}^2 \qquad (4.19)$$

และจากที่ให้ $E_t\varepsilon_{t+1}^2$ เท่ากับ σ_{t+1}^2 จึงแสดงว่าค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขไม่ใช่ค่าคงที่และจะได้จากแบบจำลองในการประมาณค่าส่วนที่เหลือออกมาดังสมการ (4.20)

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0+\alpha_1\hat{\varepsilon}_{t-1}^2+\ldots+\alpha_q\hat{\varepsilon}_{t-q}^2+v_t \qquad (4.20)$$

เมื่อ v_t = White Noise Process

ถ้าค่าของ $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_q$ เท่ากับศูนย์ ค่าความแปรปรวนจากการประมาณจะเท่ากับค่าคงที่ α_0 อีกนัยหนึ่ง คือค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของ x_t จะมีการเปลี่ยนแปลงสอดคล้องกับ Autoregression ในสมการ (4.20) ดังนั้นจะสามารถใช้สมการ (4.20) ในการพยากรณ์ค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขที่เวลา t+1 ดังสมการ (4.21)

$$E_t\varepsilon_{t+1}^2 = \alpha_0+\alpha_1\hat{\varepsilon}_t^2+\alpha_2\hat{\varepsilon}_{t-1}^2+\ldots+\alpha_q\hat{\varepsilon}_{t+1-q}^2 \qquad (4.21)$$

จากเหตุผลที่กล่าวมา สมการ (4.20) เรียกว่า Autoregressive Conditional Heteroscadastic (ARCH) Model และสมการ (4.21) เป็น ARCH(q) สมการ (4.21) ค่า $E_t\varepsilon_{t+1}^2$ หรือ σ_{t+1}^2 จะประกอบด้วย 2 องค์ประกอบ คือค่าคงที่และความผันผวนในคาบเวลาที่ผ่านมา ซึ่งเขียนได้เป็นส่วนเหลือกำลังสองของคาบในอดีต (ARCH Term) ส่วนค่าสัมประสิทธิ์ ($\alpha_0,\alpha_1,...,\alpha_q$) สามารถหาค่าได้โดยใช้วิธี Maximum Likelihood

4.4 แบบจำลอง ARCH-in-mean (ARCH-M)

พื้นฐานจากแนวคิด ARCH ได้มีการขยายเพื่อให้ค่าเฉลี่ยของลำดับอนุกรมขึ้นอยู่กับความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของตัวเอง ซึ่งเรียกว่า ARCH-M เพื่อที่จะมีความเหมาะสมในการศึกษาโดยมีหลักการพื้นฐาน คือผู้ที่มีลักษณะหลีกเลี่ยงความเสี่ยง (Risk Average) จะต้องการชดเชยสำหรับการถือสินทรัพย์ที่มีความเสี่ยง (Risk Premium) เมื่อให้ความเสี่ยงในสินทรัพย์สามารถวัดค่าได้จากความแปรปรวนของผลตอบแทน ค่าชดเชยความเสี่ยงจะเป็นฟังก์ชั่นเพิ่มของความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของผลตอบแทน โดยแนวคิดนี้ได้นำส่วนที่เหลือของผลตอบแทนจากการถือครองทรัพย์สินที่มีความเสี่ยง ดังสมการ (4.22) (ภัทร์ ตั้งตระกูล, 2546)

$$x_t = \mu_t + \varepsilon_t \tag{4.22}$$

เมื่อ x_t = ผลตอบแทนส่วนเกินจากการถือครองทรัพย์สินในระยะยาว เปรียบเทียบกับหนึ่งคาบเวลาของผลตอบแทนอ้างอิง

μ_t = ค่าชดเชยความเสี่ยงที่จำเป็นในการโน้มน้าวผู้ที่มีลักษณะหลีกเลี่ยงความเสี่ยง ให้ถือครองทรัพย์สินในระยะยาวแทนที่จะเป็นในคาบเวลาเดียว

ε_t = Unforecastable Shock ของส่วนที่เหลือของผลตอบแทนในการถือทรัพย์สินในระยะยาว

ในการอธิบายสมการ (4.22) จะให้ค่าคาดหวังของส่วนที่เหลือของผลตอบแทนจากการถือครองทรัพย์สินในระยะยาวมีค่าเท่ากับค่าชดเชยความเสี่ยงดังสมการ (4.23)

$$E_{t-1}x_t = \mu_t \tag{4.23}$$

ถ้าค่าชดเชยความเสี่ยงเป็นฟังก์ชั่นเพิ่มของความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของ ε_t อีกนัยหนึ่ง คือยิ่งค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของผลตอบแทนมีขนาดใหญ่ ผลตอบแทนของการโน้มน้าวให้คนหันมาถือครองทรัพย์สินในระยะยาวก็จะยิ่งมีค่ามากขึ้นตาม ถ้า h_t เป็นความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของ ε_t ค่าชดเชยความเสี่ยงสามารถแสดงได้เป็น

$$\mu_t = \beta + \delta h_t \quad , \delta > 0 \tag{4.24}$$

เมื่อ h_t = คือ ARCH (q) process

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=0}^{q} \alpha_i \hat{\epsilon}_{t-i}^2 \tag{4.25}$$

จากสมการ (4.23) (4.24) และ (4.25) ประกอบขึ้นเป็นพื้นฐานของแบบจำลอง ARCH-M จากสมการ (4.23) และ (4.24) ค่าเฉลี่ยอย่างมีเงื่อนไขของ x_t จะขึ้นอยู่กับค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข h_t จากสมการ (4.25) ความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขได้จากกระบวนการ ARCH(q) ซึ่งเป็นการอธิบายว่า ถ้าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขเป็นค่าคงที่ (เช่น ถ้า $\alpha_1 = \alpha_2 = ... = \alpha_q = 0$) แบบจำลอง ARCH-M จะกลับไปสู่กรณีเดิมของค่าชดเชยความเสี่ยงคงที่

4.5 แบบจำลอง Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity (GARCH)

Bollerslev (1986) ได้ขยายมาจาก ARCH model โดยมีขั้นตอน คือให้ค่าความคลาดเคลื่อนจากกระบวนการเป็นดังสมการ (4.26)

$$\varepsilon_t = v_t \sqrt{h_t} \tag{4.26}$$

โดยที่ความแปรปรวนของ $v_t = \sigma_v^2 = 1$ และ

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} \tag{4.27}$$

เนื่องจาก $\{v_t\}$ เป็น White Noise Process ซึ่งเป็นอิสระกับ (ε_{t-i}) ค่าเฉลี่ยแบบมีเงื่อนไข (Conditional and Unconditional Means) ของ ε_t จะมีค่าเท่ากับศูนย์ ใส่ค่าคาดหมาย (Expected Value) ของ ε_t จะได้

$$E\varepsilon_t = Ev_t \sqrt{h_t} = 0 \tag{4.28}$$

ประเด็นที่สำคัญ คือความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไข (Conditional Variance) ของ ε_t ถูกกำหนดโดย

$$E_{t-1}\varepsilon_t^2 = h_t \tag{4.29}$$

ดังนั้นความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขของ ε_t จึงถูกกำหนดโดย h_t ในสมการ (4.29) แบบจำลองนี้จึงถูกเรียกว่า Generalized Autoregressive Conditional Heteroscedasticity ซึ่งใช้ตัว

ย่อว่า GARCH (p,q) ได้เปิดโอกาสให้มีทั้งส่วนประกอบที่เป็น Autoregressive Moving Average ในความแปรปรวนที่มีลักษณะ Heteroscedastic Variance จะเห็นได้ว่า ถ้า p = 0 และ q = 1 เราก็จะได้แบบจำลอง GARCH (0,1) ซึ่งก็คือ ARCH (1) หรือ ARCH (q=1) นั่นเอง โดยสรุปว่าถ้า β_i ทุกตัวมีค่าเท่ากับศูนย์แบบจำลอง GARCH ก็คือ ARCH (q) นั่นเอง และเพื่อทำให้ความแปรปรวนแบบมีเงื่อนไขเป็นอันตะ (Finite) รากลักษณะเฉพาะ (Characteristic Roots) ของสมการ (4.29) จะต้องอยู่ในวงกลมหน่วย (Unit Circle)

เนื่องจากแบบจำลอง GARCH มีลักษณะเป็น ARMA process ACF (Autocorrelation Function) และ PACF (Partial Autocorrelation Function) ของส่วนตกค้างหรือส่วนที่เหลือจะเป็นเครื่องชี้เกี่ยวกับ White-Noise Process อย่างไรก็ตาม ACF ของส่วนที่เหลือหรือส่วนตกค้างกำลังสอง (Squared Residuals) สามารถช่วยระบุถึง order ของ GARCH process ได้

เนื่องจาก $E_{t-1}\varepsilon_t \;=\; \sqrt{h_t}$ สามารถเขียนสมการ (4.29) ใหม่ ได้ดังนี้

$$E_{t-1}\varepsilon_t^2 \;=\; \gamma_0 + \sum_{i=1}^{q}\gamma_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-i} \qquad (4.30)$$

จะเห็นได้ว่าสมการ (4.30) มีลักษณะคล้ายกับ ARMA (q,p) ใน $\{\epsilon_t^2\}$ sequence มาก ถ้า Heteroscedasticity แบบมีเงื่อนไขมีอยู่จริง แผนภาพสหสัมพันธ์ (Correlogram) จะเป็นตัวบ่งบอกกระบวนการ (Process) ดังกล่าว

4.6 แบบจำลอง GARCH-in-mean (GARCH-M)

จากแบบจำลอง GARCH (p,q) ความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของข้อมูลอนุกรมเวลาขึ้นอยู่กับส่วนเหลือของกระบวนการนี้ (Bollerslev, 1986)

$$h_t = \quad \alpha_0 + \sum_{i=1}^{q}\alpha_i\varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^{p}\beta_i h_{t-i}$$

ความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขของข้อมูลอนุกรมเวลา ขึ้นอยู่กับส่วนเหลือกำลังสองของกระบวนการนี้ (Engle; Lilien and Robins, 1987) ขยายแนวคิดนี้โดยให้ค่าเฉลี่ยอย่างมีเงื่อนไขเป็นฟังก์ชันของความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไขโดยรู้จักกันในชื่อ GARCH-M หรือ GARCH-in-mean ผลตอบแทนจากหลักทรัพย์สามารถแสดงได้ดังสมการ (4.31) ถึง (4.33) (ภัทร์ ตั้งตระกูล, 2546)

$$x_t \;=\; \mu_t + \delta_1 h_t^{1/2} + \varepsilon_t \qquad (4.31)$$

$$\varepsilon_t / \psi_{t-1} \sim N(0,h_t) \qquad (4.32)$$

$$h_t = \omega + \sum_{i=1}^{p} \beta_i h_{t-i} + \sum_{i=1}^{q} \alpha_i (\varepsilon_{t-i})^2 \tag{4.33}$$

เมื่อ x_t คือผลตอบแทนจากหลักทรัพย์

μ_t คือค่าเฉลี่ย x_t อย่างมีเงื่อนไขต่อข้อมูลในอดีต (ψ_{t-1}) และตามสมการข้อจำกัด $\omega > 0, \alpha_i > 0$ และ $\beta_i \geq 0$ เพื่อให้แน่ใจว่าค่าความแปรปรวนอย่างมีเงื่อนไข (h_t) นั้นเป็นบวก

$h_t^{1/2}$ ในสมการ (4.31) นั้น เพื่อใช้แสดงความสัมพันธ์โดยตรงถึง Trade Off ระหว่างความเสี่ยงและผลตอบแทนที่คาดหวัง

อิทธิพลอย่างมีนัยสำคัญของความผันผวน ในผลตอบแทนจากหลักทรัพย์ถูกจับวัดได้ด้วยสัมประสิทธิ์ $h_t^{1/2}$ (δ_1) ในสมการ ซึ่งแสดงแทนดัชนีของความสัมพันธ์ของการหลีกเลี่ยงความเสี่ยง ค่าสัมประสิทธิ์ (δ_1) ที่เป็นบวกอย่างมีนัยสำคัญบอกถึงผู้ลงทุนในหลักทรัพย์เมื่อเผชิญกับระดับความเสี่ยงที่สูงขึ้นก็ต้องการค่าชดเชยความเสี่ยงที่มากขึ้นตามไปด้วย

4.7 การตรวจสอบรูปแบบ (Diagnostic Checking)

การสร้างสมการพร้อมทั้งประมาณค่าพารามิเตอร์นั้น จะต้องทำการตรวจสอบรูปแบบว่าสมการพยากรณ์ที่ได้มามีความเหมาะสมหรือไม่ และรูปแบบใดของสมการที่ดีที่สุด โดยใช้การทดสอบต่าง ๆ ดังนี้ (ภัทร์ ตั้งตระกูล, 2546)

4.7.1 การทดสอบ Box-Pierce Q –Statistics

เป็นการทดสอบว่าสหสัมพันธ์ในตัวเองในส่วนเหลือทุกช่วงเวลาที่ห่างกัน k มีความเป็นอิสระต่อกันหรือไม่

โดยมีสมมติฐานหลัก $H_0 : \rho_1(\hat{a}_t) = \rho_2(\hat{a}_t) = ... = \rho_k(\hat{a}_t) = 0$

และสมมติฐานรอง $H_1 : \rho_1(\hat{a}_t) \neq \rho_2(\hat{a}_t) \neq ... \neq \rho_k(\hat{a}_t) \neq 0$

คำนวณตามสมการที่ (4.34) คือ

$$Q-stat = T\sum_{j=1}^{k} P_j^2 \tag{4.34}$$

เมื่อ P_j คือสหสัมพันธ์ในตัวเองลำดับที่ j โดยที่ j = 1,…, k

T คือจำนวนของค่าสังเกต (Observations)

ภายใต้ส่วนเหลือจากการประมาณด้วยแบบจำลอง ARIMA ค่า Q-stat มีการแจกแจงแบบไคสแควร์ (χ^2) ด้วยระดับความเป็นอิสระ (Degree of Freedom) เท่ากับจำนวนของสหสัมพันธ์

ในตัวเอง ลบด้วยจำนวนของพารามิเตอร์ Autoregressive (AR) และ Moving Average (MA) ที่ได้มาจากการประมาณหรือ $k-m$

และจะยอมรับสมมติฐานหลักเมื่อ $Q-stat \leq \chi^2_\alpha, k-m$ คือส่วนเหลือเป็นอิสระต่อกันที่ความล่า k และถ้าปฏิเสธสมมติฐานหลักเมื่อ $Q-stat > \chi^2_\alpha, k-m$ คือเกิดสหสัมพันธ์ในตัวเองอย่างน้อยหนึ่งค่าในส่วนเหลือที่ไม่เท่ากับศูนย์

4.7.2 **เกณฑ์การเลือกรูปแบบของแบบจำลองที่ดีที่สุด** (Information Criteria)

ในการหารูปแบบของแบบจำลอง เมื่อได้รูปแบบของแบบจำลองที่เหมาะสมหลายรูปแบบ จึงต้องมีแนวทางในการเลือกรูปแบบของแบบจำลองที่ดีที่สุด โดยการพิจารณาค่า Akaike Information Criterion (AIC) และ Schwartz Criterion (SC) รูปแบบที่ให้ค่า AIC และ SC น้อยที่สุดจะเป็นรูปแบบที่ดีที่สุด (*ภัทร์ ตั้งตระกูล*, 2546)

Akaike Information Criterion (AIC) $= -2\ell/\eta + 2k/\eta$ (4.35)

Schwartz Criterion (SC) $= -2\ell/\eta + k\log\eta/\eta$ (4.36)

โดยที่ k เป็นจำนวนของพารามิเตอร์ที่ทำการประมาณค่า

η เป็นจำนวนของค่าสังเกต

ℓ เป็นค่าของ Log Likelihood Function ที่ใช้พารามิเตอร์ที่ถูกประมาณค่า k ตัว

AIC คือค่าสถิติประยุกต์ที่คล้ายกับ Adjusted R^2 แต่ใช้รูปแบบการใส่ค่าลอกกาลิทึมฐานธรรม (Natural Logarithm) หากค่า AIC นี้มีค่าน้อยเพียงใด สามารถอธิบายได้ว่าแบบจำลองที่ประมาณได้นั้นสามารถเป็นตัวแทนข้อมูลจริงได้ดีเพียงนั้น และค่า AIC นี้ยังเป็นค่าสถิติที่เหมาะสมที่จะนำไปใช้ในการหาค่าย้อนหลัง (Lag Length) ที่เหมาะสมได้อีกด้วย (Gujarati, 2003)