บทที่ 2

ทฤษฎีและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

2.1 ทฤษฎีที่เกี่ยวข้อง

2.1.1 ทฤษฎีการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ (Economic Growth Theory)

ทฤษฎีการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจที่แสดงถึงความสัมพันธ์ระหว่างการวิจัยและพัฒนา (R&D) กับการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ (Economic Growth) ที่ได้นำมาใช้อ้างอิงในงานวิจัย ได้แก่ ทฤษฎีการเติบโตจากภายใน (วสันต์ ธรรมพิทักษ์เวช, 2555)

ทฤษฎีการเติบโตจากภายใน (Endogenous Growth Theory)

ทฤษฎีการเติบโตจากภายใน (Endogenous Growth Theory) ถูกพัฒนาขึ้นในช่วงปลายทศวรรษที่ 1990s โดยนักเศรษฐศาสตร์รางวัลโนเบล คือ Robert E. Lucas (ได้รับรางวัลโนเบลสาขาเศรษฐศาสตร์ในปี 1993) และ Paul M. Romer (ได้รับรางวัลโนเบลสาขาเศรษฐศาสตร์ในปี 1996) โดยแสดงให้เห็นถึงข้อบกพร่องของแนวคิดในสำนักคลาสสิกใหม่ (Neoclassical Growth Theory) ที่กล่าวว่า การออมและการลงทุน โดยเฉพาะการลงทุนทางกายภาพ (เช่น การลงทุนในโครงสร้างพื้นฐานต่างๆ) จะส่งผลให้เศรษฐกิจเกิดการเจริญเติบโตอย่างยั่งยืนในระยะยาว ซึ่งในความเป็นจริงแล้ว ปัจจัยเหล่านี้ยังไม่เพียงพอให้เศรษฐกิจเกิดการเจริญเติบโตอย่างยั่งยืนได้

Lucas จึงได้ขยายแนวคิดของสำนักคลาสสิกใหม่ให้ครอบคลุมถึงการพัฒนาในทุนมนุษย์ (Human Capital) โดยการให้การศึกษา การพัฒนาทักษะฝีมือแรงงาน และการวิจัยและพัฒนา (R&D) โดยเชื่อว่า การลงทุนในทุนมนุษย์จะส่งผลกระทบต่อสังคมในทางที่เป็นประโยชน์ (positive externalities) ซึ่งจะส่งผลให้ประชากรและแรงงานมีประสิทธิภาพในการผลิตสูงขึ้น และสามารถผลิตสินค้าและบริการได้มากขึ้นจากการใช้ปัจจัยทุนและปัจจัยการผลิตเท่าเดิม ทำให้เศรษฐกิจมีการขยายตัว แม้ในภาวะที่มีทรัพยากรจำกัด ตามกระบวนการผลของการล้นออก (Spill-Over effects) และผลของการเรียนรู้ท่ามกลางการปฏิบัติ (Learning-by-doing effects) เนื่องจากเมื่อประชาชนหรือแรงงานมีการศึกษามากขึ้น คนเหล่านี้ก็จะมีปฏิสัมพันธ์ต่อกันและแลกเปลี่ยนความรู้ซึ่งกันและกัน ซึ่งส่งผลให้

ประสิทธิภาพของเพื่อนร่วมงานเพิ่มมากขึ้นด้วย นอกจากนั้นแล้ว การขยายตัวของการศึกษาจะทำให้ประชาชนสามารถเรียนรู้ และสั่งสมความรู้เพิ่มมากขึ้นเรื่อยๆจากประสบการณ์ในการปฏิบัติงาน จึงทำให้ประสิทธิภาพในการผลิตสามารถพัฒนาสูงขึ้นได้เรื่อยๆอย่างต่อเนื่องทางด้าน Romer ได้เสนอแนะเพิ่มเติมว่า การที่เศรษฐกิจจะเจริญก้าวหน้าหรือยกระดับผลผลิตให้เจริญเติบโตโดยผ่านกระบวนการพัฒนาทางเทคโนโลยี (Technical Progress) ได้นั้น จำเป็นอย่างยิ่งที่จะต้องมีการพัฒนาทุนมนุษย์ (Human Capital) ผ่านกระบวนการทำวิจัยและพัฒนา (R&D) เพื่อให้เกิดองค์ความรู้และนวัตกรรมใหม่ๆ ซึ่งทำให้ตัวแบบการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของ Romer ถูกเรียกว่า ตัวแบบของการวิจัยและพัฒนา (Research and Development Model) ซึ่งเขาได้เปรียบเทียบว่า การวิจัยและพัฒนา (R&D) เปรียบเสมือนการปรับปรุงสูตรอาหารใหม่ ที่ทำให้อาหารอร่อยขึ้น โดยอาจจะใช้เครื่องปรุงเท่าเดิมหรือแม้กระทั่งน้อยลง

จะได้ฟังก์ชันการผลิต (Production Function) คือ

$$Y(t) = f(K(t), H(t), R(t)) \tag{2.1}$$

โดย $Y(t)$ คือ ปริมาณสินค้าและบริการ ณ ช่วงเวลาหนึ่งๆ (ตัวชี้วัดการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ (GDP))

$K(t)$ คือ ปริมาณทุนทางกายภาพ (Capital Stock)

$H(t)$ คือ ปริมาณปัจจัยทุนมนุษย์ (Human Capital)

$R(t)$ คือ ปริมาณของการวิจัยและพัฒนา (R&D)

โดยแนวคิดนี้ จะให้ความสนใจกับปัจจัยด้านการลงทุนในทุนมนุษย์เป็นพิเศษ โดยเชื่อว่าประเทศที่ให้ความสำคัญกับการลงทุนในการพัฒนาทุนมนุษย์สูง จะมีการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจอย่างยั่งยืนในระยะยาวในอัตราที่สูงกว่าประเทศที่ให้ความสำคัญกับการพัฒนาทุนมนุษย์น้อย นอกจากนั้นทฤษฎีนี้ยังไม่เห็นด้วยกับแนวคิดของโซโล (Solow-Type Growth Model) ที่เชื่อว่า การเจริญเติบทางเศรษฐกิจนั้น ในที่สุดก็จะถึงจุดจำกัดตามกฎการลดน้อยถอยลงของผลผลิตส่วนเพิ่มของปัจจัยทุน (Law of Diminishing Returns of Capital) ซึ่งแนวคิดของทฤษฎีการเติบโตจากภายใน เชื่อว่า การเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ เป็นกระบวนการที่เกิดจากภายใน (Endogenous Growth Process) โดยเมื่อมีการลงทุนพัฒนาทุนมนุษย์ให้มีประสิทธิภาพและศักยภาพแล้ว ทุนมนุษย์เหล่านี้ ก็จะมีการสะสมและขยายตัวออกไปอย่างไม่มีที่สิ้นสุด ตามกระบวนการผลของการล้นออก (Spill-Over effects) และผลของการเรียนรู้ท่ามกลางการปฏิบัติ (Learning-by-doing effects) จึงส่งผลให้เศรษฐกิจมีการเจริญเติบโตอย่างไม่มีที่สิ้นสุด

โดยมีสมการการผลิตแบบ AK (Barro and Sala-i-Martin, 2004) ซึ่งสามารถอธิบายได้ ดังนี้

สมการการผลิต คือ

$$Y(t) = AK(t) \tag{2.2}$$

โดย $Y(t)$ คือ ปริมาณสินค้าและบริการ ณ ช่วงเวลาหนึ่งๆ (GDP)

$K(t)$ คือ ปริมาณทุนทางกายภาพ ทุนมนุษย์ และการวิจัยและพัฒนา

และ A คือ ระดับของเทคโนโลยี (Technology) ซึ่งเป็นค่าคงที่และมีค่าเป็นบวก $(A > 0)$

ในสมการที่ (2.2) นั้น ตัวแปร $K(t)$ ได้รวมปัจจัยทุนทางกายภาพ (Capital Stock) ปัจจัยทุนทนุษย์ (Human Capital) และการวิจัยและพัฒนา (R&D) จากสมการที่ (2.1) เข้าไว้ด้วยกันเป็นตัวแปรเดียว

จากสมการที่ (2.2) ทำให้อยู่ในรูปต่อหัว (per Capita) โดยหารสมการด้วยจำนวนประชากรของประเทศ ก็จะได้เป็นผลผลิตต่อหัว (Output per Capita) ดังสมการ (2.3)

$$y(t) = Ak(t) \tag{2.3}$$

โดยที่ A คือ ระดับของเทคโนโลยีที่เป็นค่าคงที่และมีค่าเป็นบวก เนื่องจากไม่มีการลดน้อยถอยลงของผลผลิตส่วนเพิ่มของทุน ถ้าสมมุติให้ระบบเศรษฐกิจเป็นแบบปิด ไม่มีภาครัฐบาลเข้ามาเกี่ยวข้อง และประชากรในแต่ละปีมีการเพิ่มขึ้น จะได้สมการเชิงอนุพันธ์พื้นฐาน (Fundamental Differential Equation) ดังสมการที่ (2.6) โดยพิจารณาจาก

$$\dot{K}(t) = sF(K(t)) - \delta K(t) \tag{2.4}$$

และทำสมการที่ (2.4) ให้อยู่ในรูปต่อหัว (per Capita) โดยหารสมการด้วยจำนวนประชากร $L(t)$ ดังนี้

$$\frac{\dot{K}(t)}{L(t)} = sf(k(t)) - \delta k(t) \tag{2.5}$$

แทนค่า $\frac{\dot{K}(t)}{L(t)} = \dot{k}(t) + nk(t)$ และ $f(k(t)) = Ak(t)$ จะได้

$$\dot{k}(t) = sf(k(t)) - (n+\delta)k(t) \tag{2.6}$$

หรือถ้าพิจารณาในรูปอัตราการเจริญเติบโตของทุน คือ $k(t)$ หรือ γ_k ก็จะได้เป็นดังสมการ (2.7)

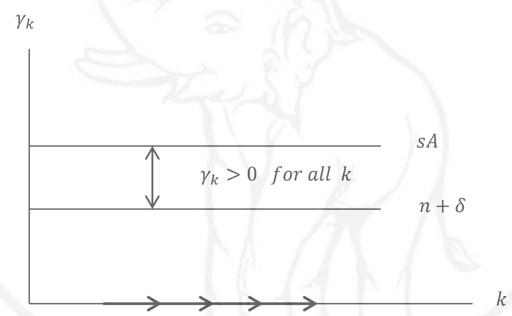
$$\gamma_k = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)} = sA - (n+\delta) \tag{2.7}$$

เนื่องจาก $y(t) = Ak(t)$ จะได้ $\frac{\dot{y}(t)}{y(t)} = \frac{\dot{k}(t)}{k(t)}$ และ $c(t) = (1-s)y(t)$ จะได้ $\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{\dot{y}(t)}{y(t)}$ ซึ่งแสดงให้เห็นว่า อัตราการเติบโตของผลผลิตต่อหัว อัตราการเติบโตของทุนต่อหัว และอัตราการเติบโตของการบริโภคต่อหัว มีการเจริญเติบโตในอัตราเดียวกัน ซึ่งเป็นค่าคงที่ ดังแสดงในสมการที่ (2.8)

$$\gamma^* = sA - (n+\delta) \tag{2.8}$$

โดย $\gamma^* = \gamma_k = \gamma_c = \gamma_y$

โดยสามารถแสดงการเจริญเติบโตของทุนต่อหัว ในกรณีของแบบจำลอง AK ได้ดังภาพที่ 2.1



ภาพที่ 2.1 การเจริญเติบโตของทุนต่อหัว (Capital per Capita) ในแบบจำลองการเติบโตจากภายใน

จากภาพที่ 2.1 ถ้าสมมุติว่า $\gamma_k > 0$ จะเห็นว่า sA มากกว่า $(n+\delta)$ ดังนั้น แบบจำลอง AK สามารถทำให้เกิดการเจริญเติบโตในระยะยาวที่มาจากภายในระบบเศรษฐกิจได้

นอกจากนี้ ทฤษฎีนี้ยังสามารถพิจารณาได้อีกรูปแบบหนึ่ง โดยแบ่งการวิเคราะห์ออกเป็น 2 ส่วน คือ ส่วนผู้ผลิตและส่วนครัวเรือน ภายใต้ข้อสมมติว่า เศรษฐกิจเป็นแบบกระจายอำนาจ (Decentralized Economy) เทคโนโลยีสามารถเข้าถึงได้ง่ายและทุกหน่วยธุรกิจสามารถเข้าถึงได้ โดยมีปัจจัยการผลิต 2 ชนิด คือ ทุน (Capital) และ แรงงาน (Labor) จึงได้ว่า Homogeneity of Degree 1 ในทุนและแรงงานเป็นดังนี้

$$F\left(\lambda K(t), \lambda L(t)\right) = \lambda F(k(t), L(t)) \tag{2.9}$$

จาก Euler's Theorem จะได้

$$F\left(K\left(t\right),L\left(t\right)\right)=F_K K\left(t\right)+F_L L(t) \tag{2.10}$$

จากสมการ (2.2) และสมการ (2.3) คือ

$$Y\left(t\right)=AK(t) \tag{2.2}$$

$$y\left(t\right)=Ak(t) \tag{2.3}$$

ค่าเฉลี่ยและผลผลิตส่วนเพิ่มหน่วยสุดท้ายของทุนมีค่าคงที่ ที่ระดับ $A>0$ โดยให้ครัวเรือนมีฟังก์ชันความพอใจในรูปความยืดหยุ่นของการทดแทนกันข้ามห้วงเวลาคงที่ (Constant Intertemporal Elasticity of Substitution: CIES) ดังนี้

$$U=\int_0^{\infty}\left[\frac{c(t)^{(1-\theta)}-1}{(1-\theta)}\right]dt \tag{2.11}$$

จากข้อสมมุติที่ว่าให้ครัวเรือนเป็นเจ้าของปัจจัยการผลิต โดยได้รับอัตราผลตอบแทนจากสินทรัพย์ $r(t)$ และอัตราผลตอบแทนจากแรงงาน $w(t)$ จากการที่ทุนมีค่าเสื่อมที่อัตราคงที่ δ ดังนั้นแล้ว อัตราค่าเช่าที่แท้จริงจะเท่ากับราคาค่าเช่าลบด้วยค่าเสื่อมของทุน

$$r\left(t\right)=R\left(t\right)-\delta \tag{2.12}$$

ข้อจำกัดงบประมาณของครัวเรือน คือ

$$\dot{a}\left(t\right)=\left(r\left(t\right)-n\right)a\left(t\right)+w\left(t\right)-c(t) \tag{2.13}$$

โดย	$a(t)$	คือ สินทรัพย์สุทธิต่อบุคคล ณ เวลา t
	$\dot{a}\left(t\right)=\dfrac{da(t)}{dt}$	คือ สินทรัพย์ที่เปลี่ยนแปลงเมื่อเวลาเปลี่ยนแปลง
	$r(t)$	คือ ค่าเช่าที่แท้จริง ณ เวลา t
	n	คือ อัตราการเจริญเติบโตของประชากร

ครัวเรือนจะแสวงหาความพอใจสูงสุด ภายใต้ข้อจำกัดของงบประมาณ โดยการสร้างสมการ Present Value Hamiltonian ดังนี้

$$H=u(c\left(t\right)e^{-(\rho-n)t}+v(t)\left[w\left(t\right)+\left(r\left(t\right)-n\right)a\left(t\right)-c(t)\right] \tag{2.14}$$

โดย $v(t)$ คือ มูลค่าปัจจุบันของราคาเงาของรายได้ในหน่วยความพอใจ

$$\frac{\partial H}{\partial \mathrm{c(t)}} = 0 \qquad \Rightarrow \qquad v(t) = u'(c(t))e^{-(\rho-n)t} \tag{2.15}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mathrm{a(t)}} = -\dot{v}(t) \quad \Rightarrow \quad \dot{v}(t) = -\left[r(t)-n\right]v(t) \tag{2.16}$$

$$\lim_{t\to\infty}\left[v(t)\cdot a(t)\right] = 0 \qquad \Rightarrow \qquad \lim_{t\to\infty}\left\{a(t)exp\left[-\int_0^t\left[r(v)-n\right]dv\right]\right\} = 0 \tag{2.17}$$

จากสมการ (2.15), (2.16) และ (2.17) จะได้เงื่อนไขสำหรับดุลยภาพ คือ

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta}\cdot(r(t)-\rho) \tag{2.18}$$

และ Transversality Condition ตามสมการ (2.19)

$$\lim_{t\to\infty}\{a(t)\exp[-\int_0^t\left[r(v)-n\right]dv]\} = 0 \tag{2.19}$$

พฤติกรรมของหน่วยธุรกิจตามแบบจำลอง AK Model คือ หน่วยธุรกิจจะมีฟังก์ชันการผลิต คือ

$$y(t) = f\left(k(t)\right) = Ak(t) \tag{2.20}$$

ซึ่ง $A>0$ และ $f'\left(k(t)\right) = A$ จากข้อสมมุติข้างต้นที่กำหนดให้ทุนมีค่าเสื่อม โดยที่อัตราค่าเช่าที่แท้จริงจะเท่ากับราคาค่าเช่าลบด้วยค่าเสื่อมของทุน ดังนั้น หน่วยธุรกิจจะทำกำไรสูงสุดภายใต้เงื่อนไข

$$R(t) = r(t) + \delta \tag{2.21}$$

$$r(t) = A - \delta \tag{2.22}$$

ถ้าผลผลิตส่วนเพิ่มของแรงงาน (Marginal Product of Labor) เท่ากับ 0 แล้ว อัตราค่าจ้าง $w(t)$ จะเท่ากับ 0 ด้วย โดยสมมติให้เป็นระบบเศรษฐกิจแบบปิด ที่สินทรัพย์จะเท่ากับทุน $\left(a(t) = k(t)\right)$ ดังนั้น ดุลยภาพของระบบเศรษฐกิจจะเป็นดังนี้

แทนค่า $a(t) = k(t)$, $r(t) = A - \delta$ และ $w(t) = 0$ จะได้

$$\dot{k}(t) = \left(A - \delta - n\right)k(t) - c(t) \tag{2.23}$$

$$\frac{\dot{c}(t)}{c(t)} = \frac{1}{\theta} \cdot (A - \delta - \rho) \tag{2.24}$$

$$\lim_{t \to \infty} \left\{ k(t) e^{-(A-\delta-n)\cdot t} \right\} = 0 \tag{2.25}$$

สมการ (2.24) แสดงถึงการเติบโตของการบริโภค ไม่ได้ขึ้นอยู่กับการสะสมทุนต่อหัว $k(t)$ หรือที่ระดับการบริโภคต่อหัว ณ เวลาศูนย์ $c(0)$ การบริโภคต่อหัว ณ เวลา t $c(t)$ คือ

$$c(t) = c(0) e^{(\frac{1}{\theta})\cdot(A-\delta-\rho)\cdot t} \tag{2.26}$$

การเติบโตของทุนและผลผลิตต่อหัว สามารถหาได้โดยการหารสมการ (2.26) ด้วย $k(t)$ จะได้

$$\frac{c(t)}{k(t)} = (A - \delta - n) - \dot{k}(t) / k(t) \tag{2.27}$$

ที่สถานะคงตัว (steady state) ตัวแปรทุกตัวมีอัตราการเจริญเติบโตคงที่ จึงจะได้ว่า พจน์ทางขวามือคือ $(A-\delta-n) - \dot{k}(t)/k(t)$ คงที่ เนื่องจาก ณ สถานะคงตัว ปริมาณของปัจจัยทุนจะไม่มีการเปลี่ยนแปลง ดังนั้น c/k จะคงที่ และอัตราการเจริญเติบโตของทุนต่อหัวจะเท่ากับอัตราการเจริญเติบโตของการบริโภคต่อหัว

ดังนั้น โดยสรุปแล้ว ทฤษฎีการเติบโตจากภายใน (Endogenous Growth Theory) จึงเป็นแนวคิดที่ชี้ให้เห็นว่า เศรษฐกิจจะเจริญเติบโตอย่างต่อเนื่องในระยะยาวได้นั้น การเน้นการลงทุนทางกายภาพอย่างเดียวไม่เพียงพอ จะต้องให้ความสำคัญกับการลงทุนในทุนมนุษย์ด้วย เศรษฐกิจจึงจะเจริญเติบโตได้อย่างยั่งยืน ทฤษฎีนี้จึงเน้นให้รัฐบาลเข้ามามีบทบาทในการส่งเสริมการลงทุน ทั้งทางด้านกายภาพและการพัฒนาทุนมนุษย์ เพื่อแก้ปัญหาความล้มเหลวของกลไกตลาด โดยเชื่อว่าประเทศที่รัฐบาลให้ความสำคัญกับการลงทุนโดยเฉพาะในทุนมนุษย์มาก ก็จะเป็นประเทศที่มีการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจสูงกว่าประเทศที่มีการลงทุนดังกล่าวน้อย

2.1.2 ทฤษฎีทางเศรษฐมิติ

1) ข้อมูลช่วงยาว (Panel Data)

ข้อมูลช่วงยาว (Panel Data) คือ ข้อมูลที่เก็บจากกลุ่มตัวอย่างชุดเดิมซ้ำๆในหลายๆช่วงเวลา จึงเป็นข้อมูลที่ประกอบไปด้วยข้อมูลภาคตัดขวางและข้อมูลอนุกรมเวลา มีข้อดีคือ สามารถอธิบายข้อมูลเฉพาะหน่วยที่มีความสัมพันธ์กันแบบข้ามเวลา และสามารถใช้แก้ปัญหาการขาดข้อมูลในบางช่วงเวลาได้ นอกจากนี้ ยังให้ผลการประมาณค่าที่มีประสิทธิภาพมากกว่า กล่าวคือ

ปัญหาความสัมพันธ์ระหว่างตัวแปรแต่ละตัวและความเอนเอียงของผลการศึกษาจะมีน้อย และสามารถอธิบายการเปลี่ยนแปลงเชิงพลวัตได้ดี รวมไปถึงสามารถใช้ศึกษาแบบจำลองที่มีความซับซ้อนได้ดีกว่าอีกด้วย (Gujarati, 2003)

แบบจำลองของข้อมูลช่วงยาวในรูปสมการเชิงเส้น สามารถเขียนได้ดังนี้

$$y_{it} = \alpha + X_{it}'\beta + \varepsilon_{it} \qquad i = 1,...,N; t = 1,...,T \tag{2.28}$$

โดยที่ i คือ มิติของข้อมูลภาคตัดขวาง

t คือ มิติของข้อมูลอนุกรมเวลา

y_{it} คือ เวกเตอร์ 1×1 ของตัวแปรตามสำหรับข้อมูลภาคตัดขวางที่ i ช่วงเวลาที่ t

X_{it} คือ เวกเตอร์ขนาด $K\times1$ ของค่าสัมประสิทธิ์

α คือ ค่าคงที่ (Intercept)

β คือ เวกเตอร์ขนาด $K\times1$

ε_{it} คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

การประมาณค่าความสัมพันธ์ของแบบจำลองข้อมูลช่วงยาว ขึ้นอยู่กับสมมุติฐานเบื้องต้นของค่าคงที่ (α) ค่าสัมประสิทธิ์ (β) และค่าความคลาดเคลื่อน จากสมการที่ (2.28) ซึ่งก่อนจะทำการประมาณค่าต้องทำการทดสอบความนิ่งของข้อมูลก่อน

2) การทดสอบความนิ่งของข้อมูลช่วงยาว (Panel Unit Root Test)

การนำข้อมูลช่วงยาวไปใช้ในการประมาณค่านั้น จะต้องทำการทดสอบความนิ่งของข้อมูลก่อน หากนำข้อมูลที่ไม่นิ่งมาประมาณค่าจะทำให้เกิดปัญหาความสัมพันธ์ที่ไม่แท้จริง (spurious regression) ซึ่งอาจทำให้ข้อมูลมีความสัมพันธ์กันมาก ทั้งที่ความเป็นจริงไม่มีความสัมพันธ์กันได้นั่นเอง ซึ่งความแตกต่างที่สำคัญระหว่างการทดสอบความนิ่งข้อมูลอนุกรมเวลา กับการทดสอบความนิ่งของข้อมูลช่วงยาว คือ ปัญหาความแปรปรวนแตกต่างกัน (Heterogeneity) เนื่องจากปัญหาดังกล่าวจะไม่มีปัญหาในการทดสอบความนิ่งของข้อมูลอนุกรมเวลาซึ่งทำการทดสอบที่ละตัว (Individual) ซึ่งการทดสอบความนิ่งของข้อมูลช่วงยาวมี 2 รุ่น โดยที่ การทดสอบความนิ่งของข้อมูลช่วงยาวรุ่นที่ 1 (First Generation of Panel Unit Root Test) ซึ่งอยู่บนพื้นฐานของสมมุติฐานว่า ข้อมูลภาคตัดขวางอิสระกัน (Cross-sectional independency hypothesis) ซึ่งได้แก่ วิธี Levin, Lin and Chu (LLC) วิธี Breitung วิธี Hadri วิธี Im, Pesaran, and Shin (IPS) วิธีFisher-ADF และวิธี Fisher-PP การทดสอบความนิ่งของข้อมูลช่วงยาวรุ่นที่ 2 (Second Generation of Panel Unit Root Test) ซึ่งอยู่บนพื้นฐานของสมมุติฐานว่า ข้อมูลภาคตัดขวางมีความสัมพันธ์กัน (Cross-sectional dependency hypothesis) ซึ่งได้แก่ วิธี Bai and Ng วิธี Moon and Perron วิธี Phillips and Sul วิธี Pesaran และวิธี Choi ซึ่งมีรายละเอียดดังนี้

2.1) การทดสอบความนิ่งของข้อมูลช่วงยาวรุ่นที่ 1 (First Generation of Panel Unit Root Test)

สมมุติว่าข้อมูลช่วงยาวมีลักษณะอัตถดถอยอันดับที่ 1 (First order autoregressive) หรือ มีลักษณะเป็น AR(1) ดังสมการที่ (2.29)

$$y_{it} = \rho_i y_{it-1} + X'_{it}\delta_i + \varepsilon_{it} \tag{2.29}$$

โดยที่ $i = 1, 2, \ldots, N$ คือ ข้อมูลภาคตัดขวาง (Cross-sectional data)

$t = 1, 2, \ldots, T_i$ คือ ระยะเวลาที่พิจารณา

X_{it} คือ ตัวแปรอิสระ (Exogeneous variables) ในแบบจำลองของสมการที่ (2.29) โดยอาจเป็น Fixed effects หรือ แนวโน้มของแต่ละหน่วยของภาคตัดขวาง (Individual Trends)

ρ_i คือ ค่าสัมประสิทธิ์ของอัตถดถอย (Autoregressive coefficients)

ε_{it} คือ ค่าความคลาดเคลื่อน (Error terms)

ถ้า $|\rho_i| < 1$ แสดงว่า y_{it} ไม่มียูนิทรูท หรือข้อมูลช่วงยาวมีลักษณะนิ่ง แต่ถ้า $|\rho_i| = 1$ แสดงว่า y_{it} มียูนิทรูท หรือข้อมูลช่วงยาวมีลักษณะไม่นิ่ง

ในการทดสอบยูนิทรูทของข้อมูลช่วงยาว มี 2 แนวทางขึ้นอยู่กับการกำหนดข้อสมมุติเกี่ยวกับค่าของ ρ_i กล่าวคือ กรณีที่ 1 สมมุติว่า ค่า ρ_i ของทุกๆ หน่วยภาคตัดขวางมีค่าเท่ากัน $(\rho_i = \rho)$ ซึ่งประกอบไปด้วยวิธี Levin, Lin and Chu (LLC) วิธี Breitung และวิธี Hadri และกรณีที่ 2 สมมุติว่า ค่า ρ_i ของทุกๆ หน่วยภาคตัดขวางมีค่าไม่เท่ากัน ซึ่งประกอบไปด้วยวิธี Im, Pesaran, and Shin (IPS) วิธี Fisher-ADF และวิธี Fisher-PP ซึ่งแต่ละวิธีในกรณีทั้งสองมีรายละเอียดดังต่อไปนี้

กรณีที่ 1 สมมุติว่า ค่า ρ_i ของทุกๆ หน่วยภาคตัดขวางมีค่าเท่ากัน ($\rho_i = \rho$)

วิธี LLC และ วิธี Breitung พิจารณาจากสมการ Augmented Dickey-Fuller (ADF) ดังนี้

$$\Delta y_{it} = \alpha y_{it-1} + \sum_{j=1}^{p_i} \beta_{ij}\Delta y_{it-j} + X'_{it}\delta + \varepsilon_{it} \tag{2.30}$$

โดยที่ $\alpha = \rho - 1$ และมีสมมุติฐานหลักคือ ข้อมูลช่วงยาวมียูนิทรูท ($H_0 : \alpha = 0$) และสมมุติฐานรอง

คือ ข้อมูลช่วงยาวไม่มียูนิทรูท ($H_a : \alpha < 0$)

- **วิธี Levin, Lin and Chu (LLC)**

วิธีนี้จะทำการกำหนดระดับล้าหลัง (Lag orders) ก่อนแล้วทำการประมาณค่า 2 สมการก่อนคือ ประมาณค่า Δy_{it} และ y_{it-1} ให้เป็นฟังก์ชันของ Δy_{it-j} (โดยที่ j = 1,2,…, p$_i$) และ $X'_{it}\delta$ ซึ่งสมมุติว่าค่าสัมประสิทธิ์ที่ประมาณค่าได้คือ $(\hat{\beta},\hat{\delta})$ และ $(\dot{\beta},\dot{\delta})$ ตามลำดับ

จากนั้น ทำการคำนวณหาค่า $\Delta\bar{y}_{it}$ และ $\bar{y}_{it-1}$ ดังสมการที่ (2.31) และ (2.32) ซึ่งลดอัตสหสัมพันธ์ (Autocorrelation) และพจน์ที่ถูกกำหนดจากภายนอก (Deterministic components)

$$\Delta\bar{y}_{it} = \Delta y_{it} - \sum_{j=1}^{p_i} \hat{\beta}_{ij}\Delta y_{it-j} - X'_{it}\hat{\delta} \qquad (2.31)$$

$$\bar{y}_{it-1} = y_{it-1} - \sum_{j=1}^{p_i} \dot{\beta}_{ij}\Delta y_{it-j} - X'_{it}\dot{\delta} \qquad (2.32)$$

ต่อจากนั้นทำการปรับค่า $\Delta\bar{y}_{it}$ และ $\bar{y}_{it-1}$ ให้เป็นมาตรฐาน (Standardizing) โดยการหารด้วยค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน (standard error) ดังสมการที่ (2.33) และ (2.34) ตามลำดับดังนี้

$$\Delta\tilde{y}_{it} = \Delta\bar{y}_{it} / s_i \qquad (2.33)$$

$$\tilde{y}_{it-1} = \bar{y}_{it-1} / s_i \qquad (2.34)$$

โดยที่ s_i คือค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานที่ได้จากการประมาณค่าสมการที่ (2.30) แล้วทำการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ α จากสมการที่ (2.35)

$$\Delta\tilde{y}_{it} = \alpha\tilde{y}_{it-1} + \eta_{it} \qquad (2.35)$$

ซึ่งค่าสถิติ t ที่ปรับปรุงแล้ว (modified t-statistic) สำหรับค่า $\hat{\alpha}$ จะมีการแจกแจงเชิงเส้นกำกับแบบปกติ (Asymptotically normally distributed) ดังสมการที่ (2.36)

$$t_\alpha * = \frac{t_\alpha - (N\tilde{T})S_N\hat{\sigma}^{-2}se(\hat{\alpha})\mu_{m\tilde{T}*}}{\sigma_{m\tilde{T}*}} \rightarrow N(0,1) \qquad (2.36)$$

โดยที่	t_α	คือ ค่าสถิติ t มาตรฐาน (Standard t-statistic) สำหรับค่า $\hat{\alpha} = 0$
	$\hat{\sigma}^2$	คือ ค่าความแปรปรวนที่ถูกประมาณค่าได้ของค่าความคลาดเคลื่อน η
	$se(\hat{\alpha})$	คือ ค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐานของ $\hat{\alpha}$

$$\tilde{T} = T - \left(\sum_i p_i / N\right) - 1$$

S_N คือ อัตราส่วนค่าเฉลี่ยของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Average standard deviation ratio)

$\mu_{m\tilde{T}*}$ คือ พจน์การปรับตัว (Adjustment terms) ของค่าเฉลี่ย (Mean)

$\sigma_{m\tilde{T}*}$ คือ พจน์การปรับตัว (Adjustment terms) ของส่วนเบี่ยงเบนมาตรฐาน (Standard deviation)

- **วิธี Breitung**

วิธีนี้มีความแตกต่างกับวิธี LLC อยู่ 2 ประการ คือ

1) ในการปรับข้อมูลให้เป็นมาตรฐาน (Standardized) นั้น จะมีเพียงนำส่วนที่เป็นอัตสัมพันธ์ (Autoregressive) ออกเท่านั้น ดังนั้นสมการที่ (2.33) และสมการที่ (2.34) ที่มาจากสมการที่ (2.31) และ (2.32) จะเป็นดังต่อไปนี้

$$\Delta\tilde{y}_{it} = \left(\Delta y_{it} - \sum_{j=1}^{p_i} \hat{\beta}_{ij} \Delta y_{it-j}\right) / s_i \tag{2.37}$$

$$\tilde{y}_{it-1} = \left(y_{it-1} - \sum_{j=1}^{p_i} \dot{\beta}_{ij} \Delta y_{it-j}\right) / s_i \tag{2.38}$$

โดยที่ค่า $\hat{\beta}$, $\dot{\beta}$ และ s_i เหมือนกับวิธี LLC

2) ค่า $\Delta\tilde{y}_{it}$ และ $\tilde{y}_{it-1}$ ถูกปรับ (transformed) และปรับแนวโน้มเวลาออก (detrended) ดังสมการที่ (2.39) และ (2.40) ตามลำดับดังนี้

$$\Delta y_{it}* = \sqrt{\frac{(T-t)}{(T-t+1)}}\left(\Delta\tilde{y}_{it} - \frac{\Delta\tilde{y}_{it+1} + \ldots + \Delta\tilde{y}_{iT}}{T-t}\right) \tag{2.39}$$

$$y_{it}* = \tilde{y}_{it} - \tilde{y}_{i1} - \frac{t-1}{T-1}(\tilde{y}_{iT} - \tilde{y}_{i1}) \tag{2.40}$$

จากนั้นทำการประมาณค่าสัมประสิทธิ์ α จากสมการที่ (2.41)

$$\Delta y_{it}* = \alpha\tilde{y}_{it-1}* + v_{it} \tag{2.41}$$

- **วิธี Hadri**

วิธีนี้คล้ายกับ วิธี KPSS คือมีสมมุติฐานหลักว่าไม่ยูนิทรูท (H_0: no unit root) ซึ่งใช้ได้ทั้งกรณีที่มีแต่ค่าคงที่ (constant) และกรณีที่มีค่าคงที่และแนวโน้มเวลา (constant and a trend) โดยในที่นี้สมมุติว่ามีทั้งค่าคงที่และแนวโน้มเวลาดังสมการที่ (2.42)

$$y_{it} = \delta_i + \eta_i t + \varepsilon_{it} \tag{2.42}$$

โดยประมาณค่าสมการที่ (2.42) ของแต่ละหน่วย (individual) แล้วคำนวณหาสถิติ LM (LM statistic) ดังสมการที่ (2.43)

$$LM_1 = \frac{1}{N}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{N} \left(\sum_t S_i(t)^2 / T^2 \right) / \dot{f}_0 \right) \tag{2.43}$$

โดยที่ $S_i(t)$ เป็นผลรวมแบบสะสมของส่วนที่เหลือ (cumulative sums of the residuals) ดังสมการที่ (2.44)

$$S_i(t) = \sum_{i=1}^{N} \hat{\varepsilon}_{it} \tag{2.44}$$

และ $\dot{f}_0$ คือค่าเฉลี่ยของตัวประมาณค่าของแต่ละหน่วย (individual) ของการปรากฏของส่วนที่เหลือ (residual spectrum) ที่ระดับความถี่เท่ากับศูนย์ ดังสมการที่ (2.45)

$$\dot{f}_0 = \sum_{i=1}^{N} f_{i0} / N \tag{2.45}$$

ค่าสถิติ LM กรณีที่มีความแตกต่าง (heteroskedasticity) ระหว่าง i จะเป็น ดังนี้

$$LM_2 = \frac{1}{N}\left(\sum\nolimits_{i=1}^{N} \left(\sum_t S_i(t)^2 / T^2 \right) / \dot{f}_{i0} \right) \tag{2.46}$$

ซึ่งค่าสถิติที่ใช้ในการทดสอบสมมุติฐานหลัก คือ

$$Z = \frac{\sqrt{N}(LM - \xi)}{\varsigma} \rightarrow N(0,1) \tag{2.47}$$

โดยที่ $\xi = 1/6$ และ $\varsigma = 1/45$ ในกรณีที่แบบจำลองมีเพียงค่าคงที่ ส่วนกรณีอื่นๆนั้น ค่า $\xi = 1/15$ และ $\varsigma = 11/6300$

กรณีที่ 2 สมมุติว่า ค่า ρ_i ของทุกๆ หน่วยภาคตัดขวางมีค่าไม่เท่ากัน

- **วิธี Im, Pesaran, and Shin (IPS)**

วิธี IPS นี้จะทำการกำหนดสมการ ADF แยกกันของแต่ละภาคตัดขวาง (each cross section) ดังสมการที่ (2.48)

$$\Delta y_{it} = \alpha_i y_{it-1} + \sum_{j=1}^{p_i} \beta_{ij} \Delta y_{it-j} + X'_{it}\delta + \varepsilon_{it} \tag{2.48}$$

โดยมีสมมุติฐานหลัก และสมมุติฐานรองในการทดสอบดังนี้

$$H_0 : \alpha_i = 0,\ for\ all\ i \tag{2.49}$$

$$H_a : \begin{cases} \alpha_i = 0 & for\quad i = 1,2,\ldots,N_1 \\ \alpha_i < 0 & for\quad i = N+1, N+2,\ldots,N \end{cases} \tag{2.50}$$

เมื่อทำการประมาณค่า ADF แยกกันแล้ว นำค่าสถิติ t สำหรับ α_i คือ $t_{iT_i}(p_i)$ มาหาค่าเฉลี่ยของสถิติ t (average of the t-statistics) ดังนี้

$$\overline{t_{NT}} = \left(\sum_{i=1}^{N} t_{iT_i}(p_i) \right) / N \tag{2.51}$$

IPS แสดงให้เห็นว่า การปรับมาตรฐาน (standardized) ค่า $\overline{t_{NT}}$ แล้วจะมีการแจกแจงปกติมาตรฐานเชิงเส้น (asymptotic standard normal distribution) ดังต่อไปนี้

$$W_{\overline{t_{NT}}} = \frac{\sqrt{N}\left(\overline{t_{NT}} - N^{-1}\sum_{i=1}^{N} E(\overline{t_{iT}}(p_i)) \right)}{\sqrt{N^{-1}\sum_{i=1}^{N} Var(\overline{t_{iT}}(p_i))}} \rightarrow N(0,1) \tag{2.52}$$

โดยที่ $E(\overline{t_{iT}}(p_i))$ คือ ค่าคาดหวังของค่าเฉลี่ย (expected mean) ของสถิติ t ที่ได้จากการประมาณ ADF

$Var(\overline{t_{iT}}(p_i))$ คือ ค่าคาดหวังของความแปรปรวน (expected variance) ของสถิติ t ที่ได้จากการประมาณ ADF

- **วิธี Fisher-ADF และ Fisher-PP**

วิธีนี้ได้ทำการรวมค่า p-values ของการทดสอบยูนิทรูทของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง ซึ่ง

คิดขึ้นโดย Maddala and Wu (1999) และ Choi (2001) โดยถ้าสมมุติให้ π_i คือค่า p-value ของภาคตัดขวางทั้งหมด N หน่วยแล้ว จะได้ว่า

$$-2\sum_{i=1}^{N}\log(\pi_i) \rightarrow \chi^2_{2N} \tag{2.53}$$

โดย Choi ได้แสดงให้เห็นว่า

$$Z = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\Phi^{-1}(\pi_i) \rightarrow N(0,1) \tag{2.54}$$

โดยที่ Φ คือ ฟังก์ชันการแจกแจงสะสมแบบปกติมาตรฐาน (the standard normal cumulative distribution function) ซึ่งสมมุติฐานหลัก (H_0) เหมือนกับวิธี Im, Pesaran, and Shin (IPS)

2.2) การทดสอบความนิ่งของข้อมูลช่วงยาวรุ่นที่ 2 (Second Generation of Panel Unit Root Test)

- **การทดสอบของ Bai และ Ng**

Bai (2001) และ Ng (2004) ได้เสนอการทดสอบ unit root โดยมีสมมุติฐานหลักที่คำนึงถึงการมีสหสัมพันธ์ของข้อมูลภาคตัดขวางว่าอาจเกิดขึ้นได้ เพื่อขจัดปัญหาที่เกิดขึ้นจากคุณสมบัติของข้อมูลที่มีความสัมพันธ์กัน โดยสร้างแบบจำลองของการวิเคราะห์องค์ประกอบของข้อมูล ดังนี้

$$y_{i,t} = D_{i,t} + \lambda_i' F_t + e_{i,t} \tag{2.55}$$

โดย $D_{i,t}$ คือ องค์ประกอบที่ถูกกำหนดมา (deterministic component) ของลำดับเวลาที่ t
F_t คือ เวกเตอร์ (r,1) ขององค์ประกอบร่วม (common factor)
λ_i คือ เวกเตอร์ของน้ำหนักองค์ประกอบ (factor loading)
$e_{i,t}$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

ในกรณีนี้ ชุดข้อมูล $y_{i,t}$ จะยังไม่นิ่ง ถ้ามีองค์ประกอบร่วมอย่างน้อย 1 ตัวของเวกเตอร์ F_t ที่ไม่นิ่ง และ/หรือมีค่าความคลาดเคลื่อน $e_{i,t}$ ที่ไม่นิ่ง

สมมุติว่า กำหนดให้ องค์ประกอบที่ถูกกำหนดมา $D_{i,t}$ สามารถแทนได้ด้วยผลกระทบแต่ละหน่วย (individual effects) α_i ที่ไม่มีแนวโน้มของเวลา ซึ่งสามารถเขียนสมการได้ใหม่ ดังนี้

$$y_{i,t} = \alpha_i + \lambda_i' F_t + e_{i,t}\ , \quad t = 1,\ldots,T \tag{2.56}$$

$$F_{m,t} = \tau_m F_{m,t-1} + v_{m,t} \ , \qquad m = 1,...,r \tag{2.57}$$

$$e_{i,t} = \rho_i e_{i,t-1} + \varepsilon_{i,t} \ , \qquad i = 1,...,N \tag{2.58}$$

จากที่องค์ประกอบร่วมที่ m ($F_{m,t}$) จะนิ่งเมื่อ $\tau_m < 1$ ส่วน $e_{i,t}$ จะนิ่งเมื่อ $\rho_i < 1$ จึงต้องทำการประมาณค่าองค์ประกอบโดยใช้ข้อมูลที่อยู่ในรูปผลต่างอันดับที่หนึ่ง ทั้งนี้ สมมุติว่าทราบจำนวน r ตัวในสมการ

พิจารณาแบบจำลองที่อยู่ในรูปผลต่างอันดับที่หนึ่ง (first-differenced)

$$\Delta y_{i,t} = \lambda_i' f_t + z_{i,t} \tag{2.59}$$

เมื่อ $z_{,t} = \Delta e_{i,t}$ และ $f_t = \Delta F_t$ จะได้ว่า $E(f_t) = 0$

และทำการทดสอบความนิ่งของค่าความคลาดเคลื่อนด้วยการคำนวณ ADF t-statistic จากการประมาณค่า $e_{i,t}$ โดยใช้แบบจำลอง ดังนี้

$$\Delta\hat{e}_{i,t} = \delta_{i,0}\hat{e}_{i,t-1} + \delta_{i,1}\Delta\hat{e}_{i,t-1} + ... + \delta_{i,p}\Delta\hat{e}_{,t-p} + \mu_{i,t} \tag{2.60}$$

โดยให้ $ADF_{\hat{e}}^{c}(i)$ คือ ค่าสถิติ ADF t-statistic ของค่าความคลาดเคลื่อน สำหรับประเทศที่ i ซึ่ง $ADF_{\hat{e}}^{c}(i)$ จะมีการแจกแจงในลักษณะเดียวกับการแจกแจงของ Dickey-Fuller ในกรณีที่ไม่มีค่าคงที่ ดังนั้น จึงสามารถใช้วิธีนี้ในการทดสอบ unit root ของค่าความคลาดเคลื่อนสำหรับข้อมูลช่วงยาว (panel data) ได้

สำหรับการทดสอบความนิ่งขององค์ประกอบร่วม จะแบ่งออกเป็น 2 กรณี คือ กรณีที่มีองค์ประกอบร่วมเพียงตัวเดียว และกรณีที่มีองค์ประกอบร่วมมากกว่า 1 ตัว โดยเมื่อตัวแปร N ตัว มีองค์ประกอบร่วม 1 ตัว $(r = 1)$ จะใช้การทดสอบ ADF มาตรฐาน และใช้แบบจำลองที่มีเทอมค่าคงที่ด้วย ดังนี้

$$\Delta\hat{F}_{1,t} = c + \gamma_{i,0}\hat{F}_{1,t-1} + \gamma_{i,1}\Delta\hat{F}_{1,t-1} + ... + \gamma_{i,p}\Delta\hat{F}_{1,t-p} + v_{i,t} \tag{2.61}$$

โดยให้ $ADF_{\hat{F}}^{c}(i)$ แทนค่าสถิติ ADF t-statistic ที่ใช้ในการประมาณค่าองค์ประกอบร่วม และมีการแจกแจงในลักษณะเดียวกับการแจกแจงของ Dickey-Fuller ในกรณีมีค่าคงที่ แต่ถ้ามีองค์ประกอบร่วมมากกว่า 1 ตัว $(r > 1)$ วิธีการทดสอบจะเริ่มด้วยการกำหนดให้ r_1 แทนจำนวนแนวโน้มตัวแปรสุ่มอิสระในองค์ประกอบร่วม และทำการทดสอบความเท่ากันของจำนวนแนวโน้มตัวแปรสุ่มอิสระในองค์ประกอบร่วมกับจำนวนองค์ประกอบร่วม นั่นคือ ทดสอบว่า $r_1 = r$ หรือไม่ ขั้นต่อมาคือการใช้วิธีทดสอบ ADF ในรูปแบบที่แบบจำลองมีทั้งค่าคงที่และแนวโน้มเวลา

สำหรับข้อมูลช่วงยาว (panel data) ที่ข้อมูลภาคตัดขวางมีความสัมพันธ์กันมาก Bai และ Ng ได้เสนอให้ทำการวิเคราะห์องค์ประกอบร่วมของชุดข้อมูล อย่างไรก็ตาม วิธีวิเคราะห์นี้ไม่เหมาะกับกลุ่มตัวอย่างขนาดเล็ก โดยจะทำให้ผลลัพธ์ที่ได้ไม่มีความน่าเชื่อถือ

- **การทดสอบของ Phillips กับ Sul และ Moon กับ Perron**

Phillips กับ Sul (2003) และ Moon กับ Perron (2004) มีแนวคิดที่ตรงข้ามกับแนวคิดของ Bai และ Ng ซึ่งได้ทำการทดสอบ unit root ของชุดข้อมูล $y_{i,t}$ โดยไม่ได้แยกทดสอบค่าความคลาดเคลื่อนและองค์ประกอบร่วม แต่ยังคงใช้แบบจำลองขององค์ประกอบอยู่ ซึ่งการทดสอบของ Moon กับ Perron จะเน้นคุณลักษณะขององค์ประกอบร่วม โดยใช้วิธีวิเคราะห์ อัตสหสัมพันธ์ที่มี fixed effect ของตัวรบกวนตามแบบจำลองขององค์ประกอบ ดังนี้

$$y_{i,t} = \alpha_i + y_{i,t}^0 \tag{2.62}$$

$$y_{i,t}^0 = \phi_i y_{i,t-1}^0 + \mu_{i,t} \tag{2.63}$$

$$\mu_{i,t} = \lambda_i' F_t + e_{i,t} \tag{2.64}$$

กำหนดให้ เวกเตอร์ F_t มีมิติเท่ากับ r และ shock ของค่าความคลาดเคลื่อนคือ $e_i^t = \sum_{i=0}^{\infty} d_{i,j} v_{i,t-j}$ โดย $v_{i,t}$ มีการแจกแจงแบบ $i.i.d.$ (0,1) และไม่มีสหสัมพันธ์กันระหว่างมิติของหน่วย (individual) ดังนั้น สหสัมพันธ์ของข้อมูลภาคตัดขวางของตัวแปร $y_{i,t}$ จะถูกกำหนดจากเวกเตอร์ λ_i เมื่อ $E(\mu_{i,t}\mu_{j,t}) = \lambda_i' E(F_t F_t')\lambda_i$

โดยสมมุติฐานหลักของการทดสอบ unit root คือ $H_0 : \phi_i = 1, \forall i = 1,..., N$ และสมมุติฐานรองคือ $H_1 : \phi_i < 1$ สำหรับ i อย่างน้อย 1 หน่วย(individual)

แนวคิดพื้นฐานของ Moon กับ Perron คือการแปลงแบบจำลองโดยขจัดผลกระทบที่เกิดจากองค์ประกอบร่วมของ $y_{i,t}$ และประยุกต์ใช้การทดสอบ unit root ที่ไม่คำนึงถึงองค์ประกอบ ซึ่งการประยุกต์นี้เป็นการเอาความสัมพันธ์ของข้อมูลภาคตัดขวางออก และมันเป็นไปไปได้ที่ข้อมูลมีการแจกแจงแบบปกติ ซึ่งส่งผลทำให้ในแต่ละมิติของหน่วย (individual) จะมีความเป็นอิสระต่อกัน

กำหนดให้ ตัวแปร $y_{i,t}$ มีจำนวนตัวอย่างเริ่มต้น $T+1$ ตัว Z เป็นเมทริกซ์ของแต่ละชุดข้อมูล $y_{i,t}$ และ Z_{-1} คือเมทริกซ์ที่อยู่ในรูปค่าล้าหลังของแต่ละชุดข้อมูล ให้ Λ เป็นเมทริกซ์ (N,r) ของน้ำหนักองค์ประกอบ λ_i และ F เป็นเมทริกซ์ขององค์ประกอบร่วม

$$\underset{(T,N)}{Z} = \begin{pmatrix} y_{1,2} & .. & y_{N,2} \\ ... & & \\ y_{1,T+1} & & y_{N,T+1} \end{pmatrix} \quad \underset{(T,N)}{Z_{-1}} = \begin{pmatrix} y_{1,1} & .. & y_{N,1} \\ ... & & \\ y_{1,T} & & y_{N,T} \end{pmatrix} \quad \underset{(T,r)}{F} = \begin{pmatrix} F_1' \\ ... \\ F_T' \end{pmatrix}$$

ดังที่กล่าวมาแล้ว แนวคิดนี้เป็นการทดสอบ unit root ของชุดข้อมูลที่ขจัดองค์ประกอบของชุดข้อมูลแล้ว เมื่อทราบค่า Λ แล้ว ก็จะสามารถเขียนโปรเจกชั่นของ Z ลงไปในที่ว่างนอกเส้นทะแยงมุมของน้ำหนักองค์ประกอบได้ (ที่ว่างจะถูกแทนที่ด้วยคอลัมน์ของ Λ)

พิจารณาสมการที่ (2.63) ภายใต้สมมุติฐานหลักของการทดสอบ unit root $(\rho_i = 1)$ เมื่อไม่มี fixed effect $(\alpha_i = 0)$ จะสามารถเขียนสมการในรูปเวกเตอร์ได้ ดังนี้

$$Z = Z_{-1} + F\Lambda' + e \tag{2.65}$$

โดย e เป็นเมทริกซ์ของค่าความคลาดเคลื่อน (T,N) และให้ $Q_A = I_N - \Lambda(\Lambda'\Lambda)^{-1}\Lambda'$ เป็น เมทริกซ์โปรเจกชั่นนอกเส้นทแยงมุมของน้ำหนักองค์ประกอบ ถ้าคูณด้วย Q_A ทั้งสองข้างของสมการจะได้สมการของข้อมูลที่ขจัดองค์ประกอบแล้ว ZQ_A ดังนี้

$$ZQ_A = Z_{-1}Q_A + eQ_A \tag{2.66}$$

โปรเจกชั่น ZQ_A จะแทนข้อมูลที่ขจัดองค์ประกอบแล้ว ซึ่งตัวรบกวน eQ_A ยังมีโครงสร้างของสหสัมพันธ์ของข้อมูลภาคตัดขวางอยู่ จากนั้นทำการทดสอบ unit root กับข้อมูลที่ขจัดองค์ประกอบแล้ว ในการทดสอบจะใช้สถิติทดสอบจากตัวประมาณค่า pooled $(\phi_i = \phi_j)$ ของรากของ อัตสหสัมพันธ์ แต่เนื่องมีความเป็นไปได้ที่จะเกิดอัตสหสัมพันธ์ระหว่างตัวรบกวน eQ_A ระหว่างชุดข้อมูล Moon กับ Perron จึงได้สร้างแบบจำลองที่ใช้สำหรับตัวประมาณค่า pooled ที่เหมาะสม คือ

$$\hat{\phi}^{+}_{pool} = \frac{trace(Z_1 Q_\Lambda Z') - NT\lambda_e}{trace(Z_{-1}Q_\Lambda Z'_{-1})} \tag{2.67}$$

โดย $\lambda_e = N^{-1}\sum_{i=1}^{N}\lambda_e^i$, λ_e^i เป็นผลรวมของ positive autocovariance ของค่าความคลาดเคลื่อน

$$\lambda_e^i = \sum_{l=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} d_{i,j}d_{i,j+l}$$

จากตัวประมาณค่า $\hat{\phi}^{+}_{pool}$ Moon กับ Perron เสนอค่าสถิติ 2 ตัวของสมมุติฐานหลักของ unit root คือ t_a และ t_b โดยค่าสถิติทั้ง 2 จะมีลักษณะ converge เมื่อ T และ N เข้าใกล้ค่าอนันต์ และ N/T เข้าใกล้ค่าศูนย์ ค่าสถิติทั้งสอง ดังแสดงในสมการต่อไปนี้

$$t_a = \frac{T\sqrt{N}(\hat{\phi}^{+}_{pool} - 1)}{\sqrt{2\gamma_e^4 / w_e^4}} \xrightarrow[T,N\to\infty]{d} N(0,1) \quad (2.68)$$

$$t_b = T\sqrt{N}(\hat{\phi}^{+}_{pool} - 1)\sqrt{\frac{1}{NT^2} trace(Z_{-1}QZ'_{-1})\frac{w_e^2}{\gamma_e^4}} \xrightarrow[T,N\to\infty]{d} N(0,1) \quad (2.69)$$

w_e^2 และ γ_e^4 มีค่าเท่ากับค่าเฉลี่ย N ของความแปรปรวนในระยะยาวของแต่ละชุดข้อมูล ($w_{e,i}^2$) และค่าเฉลี่ย N ของความแปรปรวนในระยะยาวยกกำลังสอง สำหรับแต่ละชุดข้อมูล ($\gamma_{e,i}^4$) ของค่าความคลาดเคลื่อน $e_{i,t}$ โดย $w_{e,i}^2 = (\sum_{j=0}^{\infty} d_{i,j})^2$ ถ้าค่า t_a (หรือ t_b) ที่ได้จากการคำนวณต่ำกว่าระดับนัยสำคัญแล้ว จะปฏิเสธสมมุติฐานหลักของการทดสอบ unit root สำหรับค่าสังเกตทุกตัว

- **การทดสอบของ Choi**

การทดสอบของ Choi (2002) มีรูปแบบคล้ายกับการทดสอบของ Moon และ Perron นั่นคือ เป็นการทดสอบสมมุติฐานของ unit root โดยใช้ชุดข้อมูล $y_{i,t}$ ที่ทำการปรับแล้ว ซึ่งได้ขจัดปัญหาการเกิดสหสัมพันธ์ของข้อมูลภาคตัดขวางและแนวโน้มของเวลาออก อย่างไรก็ตาม งานของ Choi ก็ยังมีความแตกต่างจากงานของ Moon และ Perron อยู่ 2 ประการ ได้แก่ ประการแรก Choi ได้ทำการศึกษาโดยใช้แบบจำลองขององค์ประกอบของค่าคลาดเคลื่อน (error-component model) คือ

$$y_{i,t} = \alpha_i + \theta_t + v_{i,t} \quad (2.70)$$

$$v_{i,t} = \sum_{j=1}^{p_i} d_{i,j} v_{i,t-j} + \varepsilon_{i,t} \quad (2.71)$$

โดย $\varepsilon_{i,t}$ เป็นตัวแปรสุ่มที่มีการแจกแจงแบบ $i.i.d.\ (0, \sigma_{\varepsilon,i}^2)$ และเป็นอิสระกันระหว่างหน่วย (individual) ผลกระทบของเวลา θ_t แสดงถึงกระบวนการที่นิ่งแบบอ่อน (weakly stationary) ของข้อมูล ซึ่งแบบจำลองนี้พิจารณาองค์ประกอบร่วมเพียง 1 ตัวเท่านั้น ($r = 1$) โดยจะแทนด้วยผลกระทบของเวลา θ_t

ในสมการที่ (2.70) มีสมมุติฐานหลักของการทดสอบ unit root สำหรับค่าความคลาดเคลื่อน คือ $H_0 : \sum_{j=1}^{p_i} d_{i,j} = 1, \forall i = 1, ..., N$ และสมมุติฐานรอง คือ มีอย่างน้อย i หน่วย (individual) ที่ $\sum_{j=1}^{p_i} d_{i,j} < 1$

ความแตกต่างประการที่ 2 คือ จากคุณสมบัติของแบบจำลอง ตัวแปร $y_{i,t}$ จะมีการทดสอบ unit root เฉพาะองค์ประกอบของแต่ละตัวเท่านั้น เพื่อกำจัดความสัมพันธ์ของข้อมูลภาคตัดขวาง จึงได้แยก $v_{i,t}$ โดยกำจัดค่าคงที่ (ผลกระทบของแต่ละตัว) α_i และเทอมของค่าคลาดเคลื่อนทั่วไป θ_t (ผลกระทบของเวลา) ออกไป ซึ่งกระบวนการนี้ประกอบด้วย 2 ขั้นตอน คือ การใช้วิธี Elliott, Rothenberget Stock (ERS) เพื่อที่จะทำให้ค่าคงที่และผลกระทบของเวลาของภาคตัดขวางหายไป และเมื่อองค์ประกอบ $v_{i,t}$ นิ่งแล้ว ก็จะทำการประมาณค่าสัมประสิทธิ์โดยวิธีถดถอยน้อยที่สุด (OLS) ได้ อย่างไรก็ตาม ถ้า $v_{i,t}$ เป็น I(1) หรือมี unit root แล้ว วิธีของ ERS จะสามารถประมาณค่าคงที่ในรูป quasi-difference โดยวิธี GLS ซึ่งจะช่วยปรับให้ได้คุณสมบัติของตัวอย่างที่ดีกว่าสำหรับการทดสอบ unit root

- **การทดสอบของ Pesaran**

Pesaran (2003) เสนอวิธีการที่แตกต่างออกไปในการแก้ปัญหาการมีสหสัมพันธ์ของข้อมูลภาคตัดขวาง โดยใช้แบบจำลองที่มีปัจจัยเดียว ด้วยตัวรบกวนที่มีน้ำหนักองค์ประกอบแตกต่างกันเหมือนกับงานของ Phillips และ Sul อย่างไรก็ตาม แทนที่จะทำการทดสอบ unit root บนพื้นฐานของส่วนเบี่ยงเบนจากการประมาณค่าองค์ประกอบร่วม Pesaran ได้เสนอให้เพิ่มค่าเฉลี่ยของค่าล้าหลังของข้อมูลภาคตัดขวางและอนุพันธ์อันดับหนึ่งของแต่ละชุดข้อมูลลงในวิธี Dickey-Fuller หรือ Augmented Dickey-Fuller ซึ่งถ้าตัวรบกวนไม่มีสหสัมพันธ์กันแล้ว ก็จะสามารถสร้างสมการการถดถอยสำหรับประเทศที่ i ได้ดังนี้

$$\Delta y_{i,t} = \alpha_i + \rho_i y_{i,t-1} + c_i \bar{y}_{t-1} + d_i \Delta \bar{y}_t + v_{i,t} \tag{2.72}$$

เมื่อ $\bar{y}_{t-1} = (1/N)\sum_{i=1}^{N} y_{i,t-1}$ และ $\Delta\bar{y}_t = (1/N)\sum_{i=1}^{N}\Delta y_{i,t}$ โดยกำหนดให้ $t_i(N,T)$ เป็นค่าสถิติ t ของการประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS) ของ ρ_i การทดสอบนี้อยู่บนพื้นฐานของวิธี ADF สำหรับชุดข้อมูลภาคตัดขวาง ซึ่งเรียกว่า CADF และถ้าอยู่ในรูป truncated จะเรียกว่า CADF* ซึ่งจะมีการหลีกเลี่ยงอิทธิพลที่มากเกินควรของผลลัพธ์ที่รุนแรงที่อาจเกิดขึ้นได้สำหรับกลุ่มตัวอย่าง T มีขนาดเล็ก โดยทั้งสองกรณีเป็นแนวคิดที่จะเปลี่ยนรูปแบบใหม่ของการทดสอบ IPS t-bar โดยอยู่บนพื้นฐานของค่าเฉลี่ยของค่าสถิติ CADF หรือ CADF* สำหรับแต่ละชุดข้อมูล (และจะเรียกแทนด้วย CIPS และ CIPS* สำหรับการวิเคราะห์ข้อมูลภาคตัดขวางโดยวิธี IPS ที่ปรับแล้ว) ดังนี้

$$CIPS = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i(N,T) \qquad\qquad CIPS^* = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i^*(N,T) \tag{2.73}$$

เมื่อค่าสถิติ CADF ในรูป truncated ถูกกำหนดให้เป็น

$$t_i^*(N,T) = \theta \begin{cases} K_1 & ; \ t_i(N,T) \le K_1 \\ t_i(N,T) & ; \ \mathrm{K}_1 < t_i(N,T) < K_2 \\ K_2 & ; \ t_i(N,T) \ge K_2 \end{cases} \tag{2.74}$$

ค่า K_1 และ K_2 ถูกกำหนดให้คงที่ โดยความน่าจะเป็นที่ $t_i(N,T)$ จะอยู่ในช่วง $[K_1, K_2]$ มีค่าเข้าใกล้ 1

ทุกค่าสถิติ CADF (หรือ CADF*) ของแต่ละชุดข้อมูล จะมีการแจกแจงในรูปแบบเชิงเส้นกำกับ โดยไม่ได้ขึ้นอยู่กับน้ำหนักขององค์ประกอบ (factor loading) ถึงแม้ว่าชุดข้อมูลจะยังมีความสัมพันธ์กันอยู่ อันเป็นผลจากความไม่เป็นอิสระขององค์ประกอบร่วม จึงมีความเป็นไปได้ที่จะคำนวณหาค่าเฉลี่ยของค่าสถิติ CADF ของแต่ละชุดข้อมูล

ทั้งนี้ วิธีนี้สามารถนำไปปรับใช้กับชุดข้อมูลที่ตัวรบกวนมีอัตสหสัมพันธ์กันได้ โดยสำหรับค่าคลาดเคลื่อนที่เป็น $AR(p)$ ค่าสถิติ CADF ของชุดข้อมูลที่เกี่ยวข้องกันจะสามารถประมาณค่าได้จากการถดถอยข้อมูลภาคตัดขวาง หรือข้อมูลอนุกรมเวลาในลำดับที่ p ดังสมการ (2.75)

$$\Delta y_{i,t} = \alpha_i + \rho_i y_{i,t-1} + c_i \bar{y}_{t-1} \sum_{j=0}^{p} d_{i,j} \Delta \bar{y}_{t-j} + \sum_{j=0}^{p} \beta_{i,j} \Delta y_{i,t-j} + \mu_{i,t} \tag{2.75}$$

3) การประมาณค่าแบบจำลองข้อมูลช่วงยาว (Panel Estimation)

การประมาณค่าความสัมพันธ์ของข้อมูลช่วงยาว เป็นการพิจารณาโดยแยกปัจจัยที่มากระทบต่อหน่วยภาคตัดขวางและช่วงเวลาที่แตกต่างกัน ซึ่งข้อสมมุติของค่าคงที่และค่าสัมประสิทธิ์มีได้หลายแบบ โดยสามารถแสดงได้ 3 แบบจำลอง ดังนี้

3.1) แบบจำลอง Pooled

แบบจำลอง Pooled เป็นการวิเคราะห์แบบจำลองที่มีค่าสัมประสิทธิ์และค่าคงที่มีความคงที่ กล่าวคือ เป็นแบบจำลองที่จุดตัด (Intercept) และความชัน (Slope) แต่ละตัวแปรเหมือนกันในทุกข้อมูลภาคตัดขวาง (ศิริขวัญ เจริญวิริยะกุล, 2551) ตามรูปแบบสมการ ดังนี้

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta_{it} + \varepsilon_{it} \tag{2.76}$$

โดยที่ i คือ มิติของข้อมูลภาคตัดขวาง

t คือ มิติของข้อมูลอนุกรม

y_{it} คือ เวกเตอร์ขนาด 1×1 ของตัวแปรตาม

α_i คือ ค่าคงที่

x_{it} คือ เวกเตอร์ขนาด $k \times 1$ ของตัวแปรอธิบาย

β_{it} คือ เวกเตอร์ $k \times 1$ ของค่าสัมประสิทธิ์

และ ε_{it} คือ ค่าความคลาดเคลื่อน

3.2) แบบจำลอง Fixed Effects

แบบจำลอง Fixed effects (Fixed Effects Model: FEM) หรือเรียกอีกอย่างหนึ่งว่า แบบจำลอง Lest-Squares Dummy Variable (LSDV) เป็นการประมาณค่าแบบจำลองโดยสมมุติให้ค่าคงที่ของสมการเปลี่ยนแปลงไปตามแต่ละหน่วย และให้ค่าสัมประสิทธิ์แต่ละหน่วยเป็นค่าคงที่ กล่าวคือ เป็นแบบจำลองถดถอยเชิงเส้นอย่างง่ายที่จุดตัด (Intercept) จะมีความแตกต่างกันในแต่ละข้อมูลภาคตัดขวาง (i) ซึ่งมีรูปแบบสมการ คือ

$$y_{it} = \alpha_i + x'_{it}\beta + \varepsilon_{it} \tag{2.77}$$

โดยที่ $\varepsilon_{it} \sim IID(0, \sigma_\varepsilon^2)$

กำหนดให้ X_{it} ไม่ขึ้นอยู่กับ ε_{it} ซึ่งสามารถเขียนสมการถดถอยที่มีตัวแปรหุ่น (dummy variable) สำหรับแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง (i) ได้ดังนี้

$$y_{it} = \sum_{j=1}^{N} \alpha_i d_{ij} + x'_{it}\beta + \varepsilon_{it} \tag{2.78}$$

โดยที่ $d_{ij} = 1$ ถ้า $i = j$ และ $d_{ij} = 0$ ถ้า $i \neq j$

จากสมการที่ (2.78) จะมีกลุ่มของตัวแปรหุ่นจำนวน N และค่าพารามิเตอร์ คือ $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_N$ และ β

จากนั้นเราจะประมาณค่าสมการที่ (2.78) ด้วยวิธี กำลังสองน้อยที่สุด (OLS) โดยค่า β ที่คำนวณโดยใช้ LSDV จะมีการเบี่ยงเบน จึงต้องกำจัดผลกระทบแต่ละหน่วยของ α_{it} โดยการเปลี่ยนแปลงข้อมูลซึ่งสามารถเขียนได้เป็น

$$\bar{y}_i = \alpha_i + \bar{x}'_i\beta + \bar{\varepsilon}_i \tag{2.79}$$

โดยที่ $\bar{y}_i = T^{-1}\sum_t y_{it}$

แบบจำลองการถดถอยที่เบี่ยงเบนออกจากค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง และไม่รวมผลกระทบแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง α_{it} สามารถเขียนได้ ดังนี้

$$y_{it} - \bar{y}_i = (x_{it} - \bar{x}_i)'\beta + (\varepsilon_{it} - \bar{\varepsilon}_i) \tag{2.80}$$

จากสมการที่ (2.80) คือ หากมีการเปลี่ยนแปลงข้อมูลที่มีค่าสังเกตในรูปการเบี่ยงเบนจากค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยภาคตัดขวางเรียกว่า "Within Transformation" และตัวประมาณค่า OLS สำหรับค่า β ที่คำนวณได้จากแบบจำลองนี้เรียกว่า "Within Estimator" หรือ "Fixed Effects Estimator" ซึ่งให้ผลที่ถูกต้องแม่นยำเช่นเดียวกับตัวประมาณแบบ LSDV (Verbeek, 2004: 346)

กำหนดโดย

$$\hat{\beta}_{FE} = \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{it} - \bar{x}_i)' \right)^{-1} \sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)(y_{it} - \bar{y}_i)' \tag{2.81}$$

จากข้อสมมุติข้างต้นที่กล่าวว่า X_{it} ไม่ขึ้นอยู่กับ ε_{it} ดังนั้น ตัวประมาณค่า β สามารถเขียนในรูปที่ไม่มีการเบี่ยงเบน และเมื่อกำหนดให้ ε_{it} กระจายตัวแบบปกติ ฉะนั้น ค่า $\hat{\beta}_{FE}$ ก็จะมีการกระจายตัวแบบปกติ ดังนี้

$$E\left\{ (x_{it} - \bar{x}_{it}) \varepsilon_{it} \right\} = 0 \tag{2.82}$$

จากสมการที่ (2.73) $\bar{x}_{it}$ จะไม่มีความสัมพันธ์กับ ε_{it} ดังนั้น

$$E\left\{ x_{it} \varepsilon_{it} \right\} = 0 \text{ สำหรับทุกค่าของ s, t} \tag{2.83}$$

ในกรณีนี้เราจะเรียก x_{it} ว่า "Strictly Exogenous" กล่าวคือ ไม่มีความสัมพันธ์กับค่าปัจจุบัน อดีต และอนาคตของค่าความคลาดเคลื่อน

เนื่องจากตัวแปรอธิบาย N ไม่ขึ้นอยู่กับค่าความคลาดเคลื่อนทุกตัว ดังนั้นตัวประมาณค่าที่ไม่ เอนเอียงคือ

$$\hat{\alpha}_i = \bar{y}_i - \bar{x}_i \hat{\beta}_{FE,} \qquad i = 1, \ldots, N \tag{2.84}$$

โดยภายใต้ข้อสมมุติในสมการ (2.82) α_{it} ของแบบจำลอง Fixed Effects จะไม่มีการเปลี่ยนแปลงเพราะค่า T คงที่ ดังนั้น ค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง $\bar{y}_i$ และ x_{it} จะไม่เบนเข้าหาค่าใดเลย

ตัวประมาณค่า Fixed Effects $\left(\hat{\beta}_{FE}\right)$ มีเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม (covariance matrix) ดังนี้

$$\mathrm{V}\left\{ \hat{\beta}_{FE} \right\} = \sigma_{\varepsilon}^2 \left(\sum_{i=1}^{N} \sum_{t=1}^{T} (x_{it} - \bar{x}_i)(x_{it} - \bar{x}_i)' \right)^{-1} \tag{2.85}$$

หากค่า T มีจำนวนมาก จะใช้ OLS ในการประมาณค่าเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วม ภายใต้การถดถอยในสมการที่ (2.80) ซึ่งผลที่ได้การประมาณค่าจะต่ำกว่าตัวแปรที่แท้จริง และค่าความแปรปรวนของ $\varepsilon_{it}-\bar{\varepsilon}_i$ คือ $(T-1)/T\sigma_\varepsilon^2$ จะมีค่ามากกว่า σ_ε^2 โดย σ_ε^2 ของตัวประมาณค่าที่ไม่มีเปลี่ยนแปลง (Consistent) สามารถหาได้จากค่าผลรวมของผลต่างกำลังสอง (Residual Sum of Squares: RSS) หารด้วย $N(T-1)$ นั่นคือ

$$\begin{aligned}\hat{\sigma}_\varepsilon^2 &= \frac{1}{N(T-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{it}-\hat{\alpha}_{it}-x_{it}'\hat{\beta}_{FE}\right)^2 \\ &= \frac{1}{N(T-1)}\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}\left(y_{it}-\bar{y}_i-\left(x_{it}-\bar{x}_{it}\right)'\hat{\beta}_{FE}\right)^2\end{aligned} \tag{2.86}$$

นอกจากนี้ ยังสามารถนำไปประยุกต์ใช้เพื่อให้ค่าระดับความเป็นอิสระ (degree of freedom) มีความถูกต้องมากขึ้น โดยการนำค่า K ไปลบที่ตัวหารในสมการ (2.86) เพราะค่าระดับความเป็นอิสระที่ถูกต้องนั้น จะทำให้ค่าพารามิเตอร์ที่ไม่ทราบค่าสอดคล้องกับพจน์ส่วนตัดในแต่ละหน่วย

3.3) แบบจำลอง Random Effects

แม้ว่าวิธี LSDV หรือแบบจำลอง fixed effects เป็นวิธีที่ง่ายสำหรับการนำไปประยุกต์ใช้ แต่ไม่เหมาะสมสำหรับแบบจำลองที่มีค่าความเป็นอิสระ (degree of freedom) จำนวนมาก หรือข้อมูลที่มีภาคตัดขวางเป็นจำนวนมาก ดังนั้น การประมาณค่าด้วยแบบจำลอง Random Effects จะช่วยเพิ่มประสิทธิภาพในการประมาณค่า โดยแบบจำลองนี้มีข้อสมมุติว่า ความแตกต่างในค่าคงที่ของสมการเป็นแบบสุ่ม และถูกรวมเข้าไปในส่วนประกอบของพจน์คลาดเคลื่อน ซึ่งอาจเรียกแบบจำลองนี้ว่า แบบจำลอง Error Components (Error Components Model: ECM)

สมมุติให้ในการวิเคราะห์การถดถอย มีปัจจัยอื่นที่มีผลกระทบกับตัวแปรตามแต่ไม่ได้รวมอยู่ในตัวแปรถดถอย ซึ่งสามารถแสดงในรูปค่าความคลาดเคลื่อนเชิงสุ่ม (Random Error Term) จากข้อสมมุติ จะพบว่า α_i คือ ตัวแปรสุ่ม (Random Factors) ที่มีความเป็นอิสระ และมีการกระจายในแต่ละหน่วย ดังนั้น สามารถเขียนแบบจำลอง Random Effects ได้ดังนี้ (Verbeek, 2004: 347-348)

$$y_{it}=\mu+\beta x_{it}'+\alpha_i+\varepsilon_{it}, \tag{2.87}$$

โดยที่ $\varepsilon_{it}\sim IID(0,\sigma_\varepsilon^2)$

$\alpha_i \sim IID(0,\sigma_\alpha^2)$

เมื่อ $\alpha_i+\varepsilon_{it}$ คือ ค่าความคลาดเคลื่อน (Error Term) ซึ่งประกอบด้วย ส่วนของความแตกต่างของแต่ละ

หน่วยที่ไม่มีความแตกต่างในช่วงเวลา และส่วนที่เหลือไม่มีความสัมพันธ์กันในช่วงเวลา ดังนั้น ความสัมพันธ์ของค่าความคลาดเคลื่อนในช่วงเวลา คือ ผลกระทบจากความแตกต่างของแต่ละหน่วย (α_i)

จากข้อสมมุติที่ α_i และ ε_i มีสัมพันธ์กันอย่างอิสระ แสดงว่า $\alpha_i + \varepsilon_{it}$ มีอัตสหสัมพันธ์ ดังนั้น การคำนวณค่าความคลาดเคลื่อนมาตรฐาน สำหรับตัวประมาณค่า OLS และตัวประมาณค่า GLS สามารถหาได้จากเมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมคลาดเคลื่อน

ตัวประมาณค่า GLS สำหรับทุกๆความคลาดเคลื่อนของแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง *i* คือ $\alpha_i\iota_T + \varepsilon_i$ โดยที่ $\iota_T = (1,1,...,1)'$ มีขนาด (Dimension) เท่ากับ T และ $\varepsilon_i = (\varepsilon_{i1},...,\varepsilon_{iT})'$

เมทริกซ์ความแปรปรวนร่วมของเวคเตอร์นี้คือ

$$V\{\alpha_i\iota_T + \varepsilon_i\} = \Omega = \sigma_\alpha^2\iota_T\iota_T' + \sigma_\alpha^2\iota_T \tag{2.88}$$

โดยที่ I_t คือ เมทริกซ์เอกลักษณ์ (Identity Matrix) ที่มีขนาดเท่ากับ T

ตัวประมาณค่า GLS สำหรับค่าพารามิเตอร์ในสมการ (2.87) สามารถหาได้จากการแปลงข้อมูลแต่ละหน่วยภาคตัดขวาง โดยการคูณเวคเตอร์ $y_i = (y_{i1},...,y_{iT})'$ ด้วย Ω^{-1}

โดยที่ $\Omega^{-1} = \sigma_\varepsilon^{-2}\left[I_T - \frac{\sigma_\alpha^2}{\sigma_\varepsilon^2 + T\sigma_\alpha^2}\iota_T\iota_T'\right]$ หรือ $\Omega^{-1} = \sigma_\varepsilon^{-2}\left[\left(I_T - \frac{1}{T}\iota_T\iota_T'\right) + \psi\frac{1}{T}\iota_T\iota_T'\right]$ เมื่อ $\psi = \frac{\sigma_\varepsilon^2}{\sigma_\varepsilon^2 + T\sigma_\alpha^2}$

ดังนั้น ตัวประมาณ GLS สามารถเขียนได้ดังนี้

$$\begin{aligned}\hat{\beta}_{GLS} &= \left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \bar{x}_i)' + \psi T\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_i - \bar{x})(\bar{x}_i - \bar{x})'\right)^{-1} \\ &\times\left(\sum_{i=1}^{N}\sum_{t=1}^{T}(x_{it} - \bar{x}_i)(y_{it} - \bar{y}_i) + \psi T\sum_{i=1}^{N}(\bar{x}_i - \bar{x})(\bar{y}_i - \bar{y})\right)\end{aligned} \tag{2.89}$$

โดยที่ $\bar{x}$ คือค่าเฉลี่ยของ x_{it} ทั้งหมดที่ $\bar{x} = (1/(NT))\sum_{i,t} x_{it}$

เมื่อ $\psi = 0$ ตัวประมาณค่า Fixed effects จะเพิ่มขึ้น เนื่องจาก $\psi \to 0$ ถ้า $T \to \infty$ ตัวประมาณค่า Fixed Effects และ Random Effects จะมีค่าเท่ากัน แต่ถ้า $\psi = 1$ ตัวประมาณค่า GLS จะเท่ากับตัวประมาณ OLS (และ Ω เป็นเมทริกซ์ Diagonal)

จากสูตรการคำนวณตัวประมาณ GLS โดยทั่วไป คือ

$$\hat{\beta}_{GLS} = \Delta\hat{\beta}_B + \left(I_k - \Delta\right)\hat{\beta}_{FE} \tag{2.90}$$

โดยที่ $\hat{\beta}_B = \left(\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)\left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)'\right)\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{x}_i - \bar{x}\right)\left(\bar{y}_i - \bar{y}\right)$ (2.91)

จึงสามารถเรียกค่า β ของตัวประมาณ OLS ในแบบจำลองสำหรับค่าเฉลี่ยของแต่ละหน่วยภาคตัดขวางว่า “Between Estimator”

$$\bar{y}_i = \mu + \bar{x}_i'\beta + \alpha_i + \bar{\varepsilon}_i, \qquad i = 1,\dots,N \tag{2.92}$$

โดยเมทริกซ์ Δ คือเมทริกซ์ที่มีการถ่วงน้ำหนักตัวประมาณค่า GLS ซึ่งตัวถ่วงน้ำหนักจะขึ้นอยู่กับค่าความสัมพันธ์ของความแปรปรวนระหว่างตัวประมาณค่าทั้งสอง โดยทั่วไปแล้ว ตัวประมาณค่า GLS จะมีประสิทธิภาพมากกว่าตัวประมาณค่า OLS เนื่องจากตัวประมาณค่า GLS ได้ขจัดปัญหา Heteroscedasticity และปัญหา Autocorrelation ฉะนั้น ถ้าตัวแปรอธิบายเป็นอิสระต่อ ε_{it} และ α_i ทุกตัว ตัวประมาณ GLS จะไม่มีการเอนเอียง (unbiased) และไม่เปลี่ยนแปลง (consistent) ที่ค่า N หรือ T (หรือทั้ง N และ T) มีค่าเข้าสู่ระยะอนันต์ ภายใต้ $E\{\bar{x}_i\varepsilon_{it}\} = 0$ และ $E\{\bar{x}_i\alpha_i\} = 0$

วิธีการคำนวณหาตัวประมาณ GLS เป็นดังนี้

$$\left(y_{it} - \vartheta\bar{y}_i\right) = \mu\left(1-\vartheta\right) + \left(x_{it} - \bar{x}_i'\right)'\beta + u_{it} \tag{2.93}$$

โดยที่ $\vartheta = 1 - \psi^{1/2}$ และค่าความคลาดเคลื่อนในรูปแบบการเปลี่ยนแปลงนี้เป็น i.i.d เมื่อค่า $\psi = 0$ นั้นจะสอดคล้องกับ Within Estimator $(\vartheta = 1)$ และสัดส่วนที่คงที่ (ϑ) ของค่าเฉลี่ยแต่ละหน่วยภาคตัดขวางคือการลบข้อมูลที่ได้จากแบบจำลองที่มีการเปลี่ยนแปลงข้อมูล $(0 \le \vartheta \le 1)$

ตัวประมาณค่า GLS ที่มีความเหมาะสมจะต้องคำนวณหาค่าความแปรปรวนก่อน ซึ่งค่าความแปรปรวน σ_ε^2 สามารถหาได้จากสมการ (2.86) ดังนั้นค่าความแปรปรวนของความคลาดเคลื่อน $\sigma_\alpha^2 + (1/T)\sigma_\varepsilon^2$ สามารถหาได้จาก

$$\hat{\sigma}_B^2 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N}\left(\bar{y}_i - \hat{\mu}_B - \bar{x}_i'\hat{\beta}_B\right)^2 \tag{2.94}$$

โดยที่ $\hat{\mu}_B$ คือ Between Estimator ของ μ

จากสมการที่ (2.94) ตัวแปรที่ไม่มีการเปลี่ยนแปลงของ σ_α^2 จะทำให้

$$\hat{\sigma}_{\alpha}^{2} = \hat{\sigma}_{B}^{2} - \frac{1}{T}\hat{\sigma}_{\varepsilon}^{2} \tag{2.95}$$

ซึ่งตัวประมาณค่านี้สามารถปรับปรุงค่าระดับความเป็นอิสระให้ถูกต้อง โดยนำ $K+1$ ลบกับตัวหาร ในสมการ (2.94) โดยผลของตัวประมาณ EGLS จะเป็นตัวประมาณค่าแบบจำลอง Random Effects ของ β (และ μ) หรือที่รู้จักในชื่อของตัวประมาณ Balestra-Nerlove (Verbeek, 2004: 347-351)

3.4) การถดถอยแบบควอนไทล์สำหรับแบบจำลอง Fixed Effects

Koenker และ Bassett (1978) ได้ทำการศึกษาการวิเคราะห์ข้อมูลโดยการถดถอยแบบควอนไทล์ (Quantile Regression) ซึ่งต่อมา ถูกพัฒนาโดย Colin (Lin) Chen (2004) โดยเป็นส่วนขยายของการประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุด (OLS) มีข้อดีคือ การประมาณค่าโดยการถดถอยแบบควอนไทล์ จะทำให้ได้ค่าสัมประสิทธิ์ออกมาหลายค่าตามการแบ่งระดับของควอนไทล์ นั่นคือ ถ้าประมาณค่าที่ควอนไทล์ 0.1 ก็จะได้ค่าสัมประสิทธิ์ออกมา 1 ค่า และถ้าประมาณค่าที่ควอนไทล์ 0.5 ก็จะได้ค่าสัมประสิทธิ์ออกมาอีกหนึ่งค่า แต่การประมาณค่าโดยวิธีกำลังสองน้อยที่สุดจะได้ค่าสัมประสิทธิ์ออกมาเพียงค่าเดียวที่ค่าเฉลี่ย ซึ่งจากเงื่อนไขการวิเคราะห์ที่แตกต่างกันของแนวโน้มเข้าสู่ศูนย์กลางและการแจกแจงของตัวแปร จึงทำให้การถดถอยแบบควอนไทล์มีความครอบคลุมและมีประสิทธิภาพมากกว่า

พิจารณาแบบจำลอง

$$y = X\beta + Z\alpha + u \tag{2.96}$$

บนพื้นฐานของการถดถอยแบบควอนไทล์ ในที่นี้จะให้ความสำคัญกับค่า α ซึ่งเป็นค่าพารามิเตอร์ในรูปแบบทั่วไปของแบบจำลอง Fixed Effects เพื่อให้การประมาณค่า β มีประสิทธิภาพมากยิ่งขึ้น จึงจำเป็นจะต้องมีกฎเกณฑ์บางอย่าง เพื่อขจัดปัญหาที่เกิดจากความซับซ้อนของการขาดคุณสมบัติของการแจกแจงของตัวแปรสุ่มที่ได้เพิ่มเข้ามา โดยพิจารณาจากตัวประมาณค่าที่อยู่ในรูปแบบ

$$(\hat{\alpha}(\tau), \hat{\beta}(\tau)) = \arg\min_{(\alpha,\beta)} \sum_{i}\sum_{j} \rho_{\tau}(y_{ij} - x_{ij}^{T}\beta - \alpha_i) + \lambda\sum_{i=1}^{n}|\alpha_i| \tag{2.97}$$

โดยค่า α_i อยู่ภายใต้ข้อสมมุติของความเป็นอิสระกันระหว่างหน่วยข้อมูลภาคตัดขวาง ในบางครั้งการใช้แบบจำลองที่ข้อมูลมีความสัมพันธ์กันอาจมีความเหมาะสมมากกว่าและเป็นรูปแบบทางเลือกให้กับการประมาณค่าที่มีบทลงโทษ (penalty) ในที่นี้ จะพิจารณาแต่ละค่าสังเกต ซึ่งมีรูปแบบของการแจกแจงเป็นฟังก์ชันควอนไทล์ ดังนี้

$$Q_{y_{ij}}(\tau | x_{ij}) = x_{ij}^T \beta(\tau) + \alpha_i(\tau) \tag{2.98}$$

โดยทั่วไป การจำแนกฟังก์ชันควอนไทล์ที่มีเงื่อนไข จะถูกกำหนดมาจากแบบจำลองของการถดถอยแบบควอนไทล์ ซึ่งต่างไปจากการจำแนกตัวแปรสุ่มที่ถือว่าเป็นแบบจำลอง Random Effects โดยมีความยืดหยุ่นมากกว่าในบางกรณี

อย่างไรก็ตาม เมื่อจำนวนค่าสังเกตในแต่ละกลุ่ม m_i มีน้อย ก็อาจส่งผลต่อการประมาณค่าผลกระทบของการกระจายเต็มจำนวน $\alpha_i(\tau)$ ในแต่ละกลุ่ม ซึ่งในกรณีนี้ จะดีกว่าถ้าใช้สมมุติฐานเดิมที่ไม่คำนึงถึงผลกระทบเฉพาะตัวของค่าสังเกตในการเปลี่ยนตำแหน่งเดิม (นั่นคือ $\alpha_i(\tau) \equiv \alpha_i$) โดยตัวประมาณค่าที่ไม่มีข้อจำกัดของ $\alpha_i(\tau)$ ควรจะรวมค่าต่างๆของ τ หรืออาจทำการประมาณค่าร่วมกัน ซึ่งวิธีนี้เหมาะกับกรณีที่ข้อมูลภาคตัดขวางมีความเป็นอิสระต่อกัน

Koenker (2004) ได้พิจารณาตัวประมาณค่าที่สามารถแก้ปัญหาบทลงโทษดังกล่าว คือ

$$\min_{(\alpha,\beta)} \sum_{k=1}^{q} \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m_i} w_k \rho_{\tau_k}(y_{ij} - \alpha_i - x_{ij}^T \beta(\tau_k)) + \lambda \sum_{i=1}^{n} |\alpha_i| \tag{2.99}$$

วิธีการนี้เป็นการรวมข้อมูลจากตัวอย่างแต่ละควอนไทล์เข้าด้วยกัน ซึ่งทำให้สามารถพัฒนาการประมาณค่าของแต่ละค่าสังเกตของ α_i ซึ่งวิธีนี้เหมาะกับกรณีที่ข้อมูลภาคตัดขวางไม่มีความเป็นอิสระต่อกันหรือมีความสัมพันธ์กันระหว่างข้อมูลภาคตัดขวางนั่นเอง

2.2 เอกสารและงานวิจัยที่เกี่ยวข้อง

บทความและงานศึกษาเกี่ยวกับการวิจัยและพัฒนา (R&D) กับการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ โดยภาพ รวมแล้ว ประเด็นที่มีการศึกษากันมากก็คือเรื่อง ผลของการวิจัยและพัฒนา (R&D) ต่อผลิตภาพของปัจจัยการผลิต ซึ่งจะก่อให้เกิดการถ่ายทอดเทคโนโลยีระหว่างอุตสาหกรรมและระหว่างประเทศ รวมถึงการสร้างสรรค์นวัตกรรมใหม่ๆ อันจะส่งผลให้เศรษฐกิจมีการขยายตัว (Economic Growth) อย่างไรก็ตาม งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง ส่วนมากยังมีการศึกษาที่จำกัดอยู่แต่ในเฉพาะกลุ่มประเทศพัฒนาแล้ว และอาจมีกลุ่มประเทศกำลังพัฒนาบ้าง แต่กลับมีงานศึกษาเกี่ยวกับกลุ่มประเทศพัฒนาน้อยที่สุดอยู่น้อยมาก และยังมีการแยกพิจารณาเป็นรายประเทศ ส่งผลให้ผลการวิจัยที่ได้ไม่มีความแปลกใหม่และหลากหลาย ทั้งยังไม่ครอบคลุมบริบทของหลายๆประเทศ ดังนั้น ประเด็นการศึกษาโดยเปรียบเทียบระหว่างกลุ่มประเทศตามระดับการพัฒนาจึงเป็นประเด็นใหม่ที่มีความน่าสนใจ และสามารถนำไปต่อยอดงานวิจัยได้ในอนาคต

ทั้งนี้ งานวิจัยที่เกี่ยวข้อง สามารถแยกได้เป็น 3 ประเด็น คือ 1) ความสัมพันธ์ระหว่างการวิจัยและ

พัฒนากับการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ 2) การวิเคราะห์ดุลยภาพทั่วไปเชิงพลวัตของการวิจัยและพัฒนาต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ และ 3) บทบาทของการวิจัยและพัฒนาต่อระบบเศรษฐกิจมวลรวม ซึ่งมีรายละเอียด ดังนี้

ประเด็นแรก ความสัมพันธ์ระหว่างการวิจัยการพัฒนา (R&D) และการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจปรากฏอยู่ในงานวิจัยของ **Sylwester** (1995) เรื่อง "การวิจัยและพัฒนา (R&D) กับการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ" ซึ่งทำการทดสอบความสัมพันธ์ระหว่างค่าใช้จ่ายด้านการวิจัยและพัฒนากับอัตราการเจริญเติบโตของผลผลิตต่อหัว โดยใช้ข้อมูลจากกลุ่มประเทศสมาชิกองค์การเพื่อความร่วมมือทางเศรษฐกิจและการพัฒนา (Organization for Economic Co-operation and Development: OECD) จำนวน 20 ประเทศ และวิเคราะห์ข้อมูลโดยใช้วิธีการถดถอยหลายตัวแปร (multivariate regression) ซึ่งพบว่า การวิจัยและพัฒนา (R&D) ไม่มีความสัมพันธ์กับการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของกลุ่มประเทศสมาชิก OECD แต่กลับพบความสัมพันธ์ทางบวกระหว่างตัวแปรทั้งสอง เมื่อพิจารณาเฉพาะกลุ่มประเทศอุตสาหกรรมอุตสาหกรรมชั้นนำ 7 ประเทศ (Group of Seven: G7) ซึ่งประกอบด้วย สหรัฐอเมริกา อังกฤษ ฝรั่งเศส เยอรมนี อิตาลี ญี่ปุ่น และ แคนาดา

สอดคล้องกับงานวิจัยของ **Yanyun และ Mingqian** (2003) ที่ศึกษาความสัมพันธ์ระยะยาวระหว่างค่าใช้จ่ายในการวิจัยและพัฒนา (R&D) กับการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของประเทศ ASEAN +3 โดยพบว่า ค่าใช้จ่ายในการวิจัยและพัฒนามีความสัมพันธ์ทางบวกกับการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจอย่างมีนัยสำคัญ รวมถึงงานวิจัยของ **Ulku** (2004) ที่ศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการวิจัยและพัฒนา (R&D) นวัตกรรม (Innovation) กับการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ บนพื้นฐานของแบบจำลองการเติบโตจากภายใน (Endogenous Growth Model) โดยใช้ข้อมูลทุติยภูมิ ประเภทข้อมูลช่วงยาว (Panel Data) รายปี ตั้งแต่ปี ค.ศ.1981-1997 (17 ปี) จาก 30 ประเทศ อันประกอบด้วย ประเทศสมาชิก OECD 20 ประเทศ และประเทศอื่นที่ไม่ใช่สมาชิกอีก 10 ประเทศ ซึ่งพบว่า สำหรับกลุ่มประเทศ OECD การวิจัยและพัฒนามีผลกระทบทางบวกต่อการเติบโตทางเศรษฐกิจอย่างมีนัยสำคัญ ต่างกับกลุ่มประเทศอื่นที่ไม่ใช่สมาชิก ที่ไม่พบความสัมพันธ์ของการวิจัยและพัฒนากับการเติบโตทางเศรษฐกิจ

สำหรับการวิเคราะห์ดุลยภาพทั่วไปเชิงพลวัตระหว่างการวิจัยและพัฒนาและการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจนั้น ปรากฏอยู่ในงานวิจัยของ **M. Jesus Freire-Seren** (1999) เรื่อง "ค่าใช้จ่ายมวลรวมของการวิจัยและพัฒนากับการเติบโตจากภายใน" มีจุดประสงค์เพื่อวิเคราะห์ในเชิงทฤษฎีและเชิงประจักษ์เกี่ยวกับหลักการของค่าใช้จ่ายในการวิจัยและพัฒนามวลรวมต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ โดยใช้ตัวแปรนวัตกรรมทางเทคโนโลยีที่ขึ้นอยู่กับค่าใช้จ่ายในการวิจัยและพัฒนาแทนปัจจัยแรงงาน เพื่อดูขนาดของผลกระทบของตัวแปรภายในต่อการเติบโตอย่างยั่งยืน เมื่อกำหนดให้

จำนวนประชากรมีขนาดคงที่ ทั้งยังได้เชื่อมโยงกับการวิเคราะห์ผลกระทบที่เกิดจากการกำหนดนโยบายของรัฐที่แตกต่างกัน โดยในส่วนของการวิเคราะห์เชิงประจักษ์นั้น จะใช้แบบจำลองทางเศรษฐมิติที่กำหนดจากดุลยภาพของระบบเศรษฐกิจแบบกระจายอำนาจ ซึ่งเงื่อนไข fee-entry จะทำให้ได้จุดดุลยภาพของกิจกรรมการวิจัยและพัฒนากับฟังก์ชันนโยบายของรัฐที่กำหนดระดับราคาสิทธิบัตร

ผลการศึกษา พบว่า แบบจำลองที่ได้ชี้ให้เห็นว่าค่าใช้จ่ายในการวิจัยและพัฒนาสามารถช่วยให้เกิดการเจริญเติบโตอย่างยั่งยืนได้ อันเนื่องมาจากการเติบโตอย่างต่อเนื่องของรายได้ต่อหัวของประเทศส่วนหนึ่งขึ้นอยู่กับทางเลือกของบุคคลในการใช้จ่ายสำหรับกิจกรรมการวิจัยและพัฒนา โดยแบบจำลองนี้จะวิเคราะห์การเติบโตที่เกิดจากผลของนโยบายรัฐ และพบว่าการลดหย่อนภาษีไม่เพียงแต่จะส่งเสริมให้เกิดการลงทุนในการวิจัยและพัฒนาที่ก่อให้เกิดนวัตกรรมแล้ว ยังทำให้เกิดผลิตภาพของทุนทางกายภาพอีกด้วย ดังนั้น แบบจำลองนี้ จึงแสดงให้เห็นว่า การอุดหนุนทุนทางกายภาพจะส่งผลกระทบทางบวกต่ออัตราการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจในระยะยาว เนื่องจากทำให้เกิดแรงจูงใจที่จะเพิ่มความหลากหลายของสินค้าทุน

ในการวิเคราะห์เชิงประจักษ์ ซึ่งได้ใช้แบบจำลองทางเศรษฐมิติ พบว่า สามารถทำการประมาณค่าอัตราการเติบโตของเทคโนโลยี ตลอดจนค่าใช้จ่ายในการวิจัยและพัฒนา และองค์ประกอบพลวัตอื่นๆ อันเป็นผลมาจากการใช้เงื่อนไข free-entry ของดุลยภาพในกิจกรรมการวิจัยและพัฒนาและฟังก์ชันนโยบายรัฐ ซึ่งนำไปสู่การกำหนดระดับราคาสิทธิบัตร โดยใช้ข้อมูลข้ามประเทศ ผลปรากฏว่า สัมประสิทธิ์ของตัวถดถอยการวิจัยและพัฒนามีผลกระทบทางบวกอย่างมีนัยสำคัญอย่างมาก และมีความสัมพันธ์ทางบวกระหว่างการเติบโตของค่าใช้จ่ายในการวิจัยและพัฒนามวลรวมและการเติบโตของ GDP โดยค่าการประมาณค่าสัมประสิทธิ์แสดงให้เห็นว่า การเพิ่มขึ้นของค่าใช้จ่ายในการวิจัยและพัฒนามวลรวมร้อยละ 1 จะส่งผลให้ GDP ที่แท้จริงเพิ่มขึ้นร้อยละ 0.08 และสุดท้ายพบว่า ค่าความยืดหยุ่นของค่าใช้จ่ายในการวิจัยและพัฒนามีค่าเข้าใกล้ 1 แต่ค่าสัมประสิทธิ์ของตัวแปรนวัตกรรมทางเทคโนโลยีที่ได้ไม่มีนัยสำคัญทางสถิติ

และงานวิจัยของ **Chu และ Cozzi** (2013) เรื่อง “การวิจัยและพัฒนา กับการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ ในระบบเศรษฐกิจแบบ Cash-in-Advance” ซึ่งวิเคราะห์ผลกระทบของนโยบายการเงินต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจและสวัสดิการสังคม โดยสร้างแบบจำลองบนพื้นฐานของ Schumpeterian Model และข้อจำกัดของ Cash-in-Advance ต่อการบริโภค การลงทุนในการวิจัยและพัฒนา และการผลิต ผลการศึกษา พบว่า การเพิ่มอัตราดอกเบี้ยที่เป็นตัวเงิน (Nominal Interest Rate) จะลดการลงทุนในการวิจัยและพัฒนา (R&D) และส่งผลกระทบทางลบต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจ โดยเมื่อวิเคราะห์ดุลยภาพตามหลักของ Friedman’s Rule ปรากฏว่า การเกิดดุลยภาพ

เชิงพลวัตในระยะสั้นในระบบเศรษฐกิจ ขึ้นอยู่กับความเชื่อมโยงกันระหว่างข้อจำกัดของ Cash-in-Advance การวิจัยและพัฒนา และการผลิต นั่นคือ ดุลยภาพจะสามารถเกิดขึ้นได้ถ้าผลกระทบของข้อจำกัดของ Cash-in-Advance ต่อการผลิต นำไปสู่ผลกระทบของ (กระทบโดย) ข้อจำกัดของ Cash-in-Advance ต่อการวิจัยและพัฒนา และการลงทุนในการวิจัยและพัฒนาที่ต่ำมาก (Underinvestment) หรือสูงมาก (Overinvestment) ก็เป็นอีกเงื่อนไขที่จำเป็นและเพียงพอให้เกิดดุลยภาพได้ในระยะสั้น

และสุดท้าย บทบาทของการวิจัยและพัฒนาต่อระบบเศรษฐกิจมวลรวม ปรากฏในงานวิจัยของ **Yuen Ping Ho และ Poh Kam Wong** (2009) เรื่อง “ผลกระทบของการวิจัยและพัฒนา (R&D) ต่อระบบเศรษฐกิจของประเทศสิงคโปร์: การประเมินผลเชิงประจักษ์” โดยศึกษาผลกระทบของการวิจัยและพัฒนา (R&D) ต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของประเทศสิงคโปร์ บนพื้นฐานของฟังก์ชันการผลิตแบบ Cobb-Douglas และทำการประมาณค่าพารามิเตอร์ด้วยวิธีการถดถอยแบบกำลังสองน้อยที่สุด (Ordinary Least Squares: OLS) ผลการศึกษา พบว่า การลงทุนในการวิจัยและพัฒนามีความสัมพันธ์ทางบวกกับผลิตภาพของปัจจัยการผลิต (Total Factor Productivity: TFP) อย่างมีนัยสำคัญ ซึ่งจะนำไปสู่การเกิดดุลยภาพในระยะยาวได้ อย่างไรก็ตาม เมื่อเทียบกับกลุ่มประเทศ OECD แล้ว ผลกระทบของการวิจัยและพัฒนาที่มีต่อการเจริญเติบโตทางเศรษฐกิจของประเทศสิงคโปร์ มีน้อยกว่าผลกระทบที่เกิดกับกลุ่มประเทศ OECD เนื่องจากการเพิ่มประสิทธิผลของการวิจัยและพัฒนาต่อผลิตภาพการผลิต นอกจากการเพิ่มแรงจูงใจให้กับนักลงทุนให้เล็งเห็นถึงประโยชน์ของการทำวิจัยและพัฒนาผลิตภัณฑ์แล้ว ภาครัฐจะต้องเข้ามามีบทบาทในการบริหารจัดการให้มีการลงทุนในการวิจัยและพัฒนาอย่างมีประสิทธิภาพมากขึ้นอีกด้วย

ทั้งนี้ ยังมีงานวิจัยอื่นๆ ที่ให้ผลการศึกษาสอดคล้องกับงานวิจัยดังกล่าว เช่น งานวิจัยของ **Dominique และ Bruno** (2011) ที่ทำการประมาณค่าผลกระทบของการเปลี่ยนแปลงเทคนิคการผลิตต่อผลิตภาพของปัจจัยการผลิตของกลุ่มประเทศ OECD โดยใช้แบบจำลอง Error Correction Model (ECM) ผลการศึกษา พบว่า การวิจัยและพัฒนาทำให้ผลิตภาพของการผลิตเพิ่มสูงขึ้น ซึ่งจะส่งผลดีและช่วยให้เศรษฐกิจเกิดการเจริญเติบโต โดยภาครัฐควรจะมีหน่วยงานที่คอยดูแลเกี่ยวกับการวิจัยและพัฒนาให้อยู่ในระดับที่เหมาะสม และให้การศึกษาขั้นสูงแก่นักวิจัย เพื่อให้สามารถพัฒนาผลงานได้อย่างต่อเนื่อง รวมถึงการสนับสนุนให้มีการถ่ายทอดเทคโนโลยีระหว่างประเทศ โดยเปิดโอกาสให้มีการไหลเข้าของสินค้า ทรัพยากรมนุษย์ และองค์ความรู้ใหม่ๆ เพื่อเพิ่มศักยภาพให้กับการผลิตของประเทศ

รวมถึงงานวิจัยของ **Tijssen** (2012) ที่ศึกษาอย่างเจาะลึกถึงความเชื่อมโยงกันของหน่วยงาน/องค์กรที่ดำเนินการวิจัยและพัฒนา (R&D) โดยทำการศึกษาความสัมพันธ์ระหว่างการวิจัยและพัฒนาใน

หน่วยธุรกิจและการวิจัยและพัฒนาของสถาบันการศึกษาในกลุ่มประเทศ OECD ผลการศึกษา พบว่า ในการปรับตัวเพื่อรองรับต่อกระแสโลกาภิวัตน์ในปัจจุบัน การทำวิจัยและพัฒนาเป็นกระบวนการที่ต้องใช้เงินทุนและเทคโนโลยีขั้นสูง รวมถึงนักวิจัยที่มีความรู้และมีศักยภาพในการดำเนินการวิจัย ซึ่งยากแก่การที่องค์กร/สถาบันจะสามารถดำเนินการวิจัยได้เพียงลำพัง ทำให้หน่วยงานต่างๆมีการใช้เครื่องมือและบุคลากร รวมถึงองค์ความรู้ต่างๆร่วมกัน และเมื่อวัดประสิทธิภาพของผลงาน ปรากฏว่ามีประสิทธิภาพมากกว่าการแยกกันดำเนินงาน และยังสามารถก่อให้เกิดนวัตกรรมหรือผลิตภัณฑ์ใหม่ๆได้เป็นจำนวนมาก อันจะเป็นประโยชน์แก่ทุกภาคส่วนและยังส่งผลให้เศรษฐกิจมีการขยายตัวอย่างต่อเนื่อง